

OCENA BRZINE OBRTANJA TROFAZNOG ASIHRONOG MOTORA ZASNOVANA NA REFERENTNOM MODELU ROTORSKOG KOLA

Abstract: U radu je prikazana estimacija brzine obrtanja rotora asihronog motora primenom MRAS opserversa. Procena brzine je zasnovana na redundansi. MRAS opservers koristi dva nezavisna estimatora rotorskog fluksa. Koristeći se Landau-ovim kriterijuma u izboru adaptivnog mehanizma definisan je kriterijum stabilnost. Primenom teorije pasivnosti i teorije hiperstabilnosti pokazana je stabilnost predložene MRAS strukture.

Key Words: MRAS opservers, hiperstabilnost, estimator, estimacija brzine, redundansa, adaptivni mehanizam, diskriminator greške, Landauov metod, Popovljević kriterijum

1. Uvod

Upotreba savremenih digitalnih kontrolera u električnim pogonima sa asihronim motorom omogućuje da se u rešavanju problema upravljanja, ugradnja dodatnih davača (struje, temperature, brzine, položaja, napona kao i senzore za merenje potrebnih pogonskih veličina) zamene softverskom implementacijom. U ovom radu bavićemo se rešavanjem problema određivanja brzine i položaja rotora na osnovu informacije o statorskim strujama i naponima, čime bi se obezbedio rad pogona bez davača na vratilu motora (*sensorless*).

Estimacija brzine obrtanja rotora asihronog motora može se uraditi primenom **Model Reference Adaptive System (MRAS)** opservera. MRAS opserver je zasnovan na redundansi. Odnosno mogućnosti da se jedna veličina, u ovom slučaju reč je o rotorskom fluksu, proceni pomoću dva različita estimatora.

Koristeći prvi estimator, rotorski fluks, zapisan sledećom jednačinom:

$$\tilde{\Psi}_R^U = \tilde{\alpha}_0 \tilde{\Psi}_D^U + \tilde{\beta}_0 \tilde{\Psi}_Q^U$$

se može odrediti integracijom diferencijalnih jednačina naponskog balansa u statorskim namotajima. Gde se oznake D i Q odnose na rotorske veličine $\alpha \equiv d - \beta \equiv q$ nepomičnog koordinatnog sistema, koordinatni sistem je vezan za stator. Dok U u *superscript*-u označava da je reč o estimaciji fluksa rotora korišćenjem "naponskih", t.z.v. "UI", jednačina statora. Fluks rotora u ovom slučaju zavisi od sledećih parametara:

$$\tilde{\Psi}_R^U = f(\vec{u}_S, \vec{i}_S, R_S, L_\sigma).$$

Sa druge strane, rotorski fluks dat jednačinom:

$$\tilde{\Psi}_R^I = \tilde{\alpha}_0 \tilde{\Psi}_D^I + \tilde{\beta}_0 \tilde{\Psi}_Q^I$$

se može estimirati i integracijom jednačina rotorskog kola. Gde se oznake D i Q odnose na rotorske veličine $\alpha \equiv d - \beta \equiv q$ nepomičnog koordinatnog sistema, koordinatni sistem je vezan za stator. Dok I u *superscript*-u označava da je reč o estimaciji fluksa rotora korišćenjem "strujnih", t.z.v. "I- ω ", jednačina statora. Fluks rotora u ovom slučaju zavisi od sledećih parametara:

$$\tilde{\Psi}_R^I = f(\vec{i}_S, R_R, L_R, L_\sigma, \hat{\omega}_R)$$

gde je $\hat{\omega}_R$ brzina obrtanja rotora t.j. brzina sa kojom se rotorski namotaj obrće u odnosu na $\alpha \equiv d - \beta \equiv q$ stacionarni koordinatni sistem ($\hat{\omega}_R$ je zapravo ocena ω_R).

Sada kada je fluks rotora dvojako estimiran može se pristupiti izračunavanju greške $\Delta\tilde{\Psi}$. Odstupanje ocene fluksa $\tilde{\Psi}_R^U$ iz "naponskih" "UI" jednačina statora i ocene $\tilde{\Psi}_R^I$ iz "strujnih" "I- ω " jednačina rotora daje osnov za ocenu ω_R . Ukoliko su svi preostali parametri poznati tada

$$\Delta\tilde{\Psi} = \tilde{\Psi}_R^U - \tilde{\Psi}_R^I$$

može biti različito od nule isključivo usled različitih vrednosti procenjene i stvarne brzine obrtanja rotora:

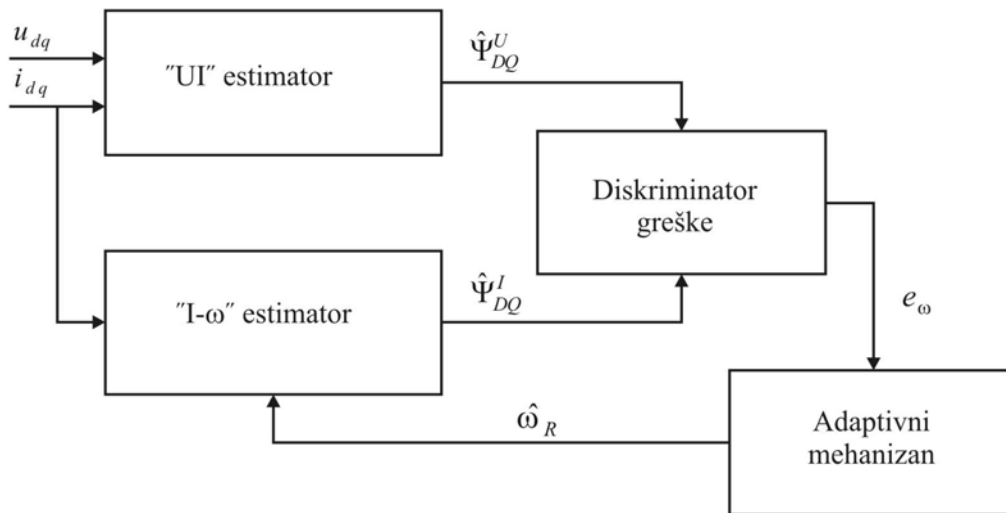
$$\Delta\omega = \omega_R - \hat{\omega}_R$$

U daljem razmatranju uvedene su sledeća, uobičajena, zanemarivanja:

- a) nelinearnost magnetnog kola
- b) gubici u gvožđu

2. Blok dijagram za ocenu brzine ω_R

Merene veličine u_d, u_q, i_d, i_q su terminalni naponi i struje statora u stacionarnom $\alpha \equiv d - \beta \equiv q$ koordinatnom sistemu, dok je ω_R aktualna, $\hat{\omega}_R$ ocenjena brzina, a e_ω signal greške. Oznaka $\hat{\cdot}$ nad rotorskim fluksevima, Sl. 2.1. označava činjenicu da je reč o estimiranim, a ne merenim veličinama.



Sl. 2.1. Blok dijagram MRAS opservera za ocenu brzine rotora ω_R

U estimatore ulazi struja statora i_{dq} i napon statora u_{dq} , odnosno procenjena brzina rotora $\hat{\omega}_R$, korišćenjem "naponskih" jednačina statora, odnosno "strujnih" jednačina rotora dobijaju se procenjeni fluks rotora ($\hat{\Psi}_{DQ}^U$ i $\hat{\Psi}_{DQ}^I$). Na osnovu vrednosti estimiranog fluksa, u bloku Diskriminator greške, vrši se procena greške fluksa rotora. Dobijena greška e_ω se zatim preko adaptivnog mehanizma transformiše u ocenjenu brzinu rotora $\hat{\omega}_R$.

3. Statorske jednačine

U estimatoru "UI" vrši se procena prostornog vektora rotorskog fluksa integracijom diferencijalnih jednačina naponskog balansa statorskih namotaja. Napomenimo da je koordinatni sistem nepomičan, odnosno vezan za stator.

Krenimo od jednačina u $\alpha\beta$ stacionarnom sistemu:

$$\begin{aligned} u_d &= R_S i_d + \Psi_d^U \\ u_q &= R_S i_q + \Psi_q^U \end{aligned} \quad (1)$$

Za sada smatramo da je $R_S = \hat{R}_S$, kao i idealno merenje u_s i i_s .

U cilju izračunavanja rotorskog fluksa, iz matrice induktivnosti može se pisati veza statorskog i rotorskog fluksa:

$$\begin{aligned} \Psi_d^U &= \frac{L_m}{L_R} \Psi_D^U + L_\sigma i_d \\ \Psi_q^U &= \frac{L_m}{L_R} \Psi_Q^U + L_\sigma i_q \end{aligned} \quad (2)$$

gde L_σ predstavlja ukupno rasipanje i dato je formulom:

$$L_\sigma = \frac{1}{L_R} (L_R L_S - L_m^2) \quad (3)$$

Zamenom statorskog fluksa jednačinama (2), jednačine (1) dobijaju oblik:

$$\begin{aligned} u_d &= R_S i_d + L_\sigma i_d' + \frac{L_m}{L_R} \Psi_D^U \\ u_q &= R_S i_q + L_\sigma i_q' + \frac{L_m}{L_R} \Psi_Q^U \end{aligned} \quad (4)$$

Odakle se može napisati rotorski fluks u kompleksnom obliku:

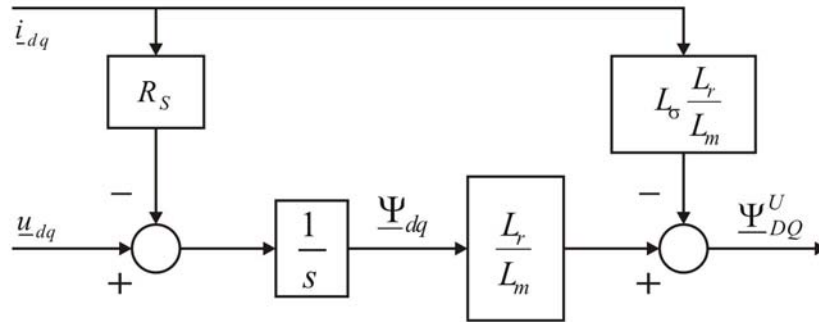
$$\Psi_D^U + j\Psi_Q^U = \frac{L_R}{L_m} \int (u_d + ju_q - R_S i_d - jR_S i_q) dt - L_\sigma \frac{L_R}{L_m} (i_d + ji_q) \quad (5)$$

Dakle, "UI" model rotorskog fluksa dat je formulom:

$$\underline{\Psi}_{DQ}^U = \frac{L_R}{L_m} \int (\underline{u}_{dq} - R_S \underline{i}_{dq}) dt - L_\sigma \frac{L_R}{L_m} \underline{i}_{dq} \quad (6)$$

Formula (6) predstavlja matematički model naponskog ("UI") estimatora rotorskog fluksa. Ulazne veličine "UI" estimatora su naponi i struje statora. Kao što se to i iz formule (6) vidi, na tačnost estimacije fluksa utiču parametri motora, od kojih dominantan uticaj ima otpornost rotora R_S .

“UI” estimator rotorskog fluksa se može predstaviti preko blok dijagram na sledeći način.



Sl. 3.1. Blok dijagram naponskog estimatora rotorskog fluksa

Primećujemo da u “UI” estimatoru rotorskog fluksa prema jednačini (6) ne figuriše brzina obrtanja rotora, a ni sinhrona brzina, tako da se ovaj estimator može iskoristiti kao referentni model asinhronog motora.

4. Rotorske jednačine

U estimatoru "1- ω " vrši se procena prostornog vektora rotorskog fluksa integracijom diferencijalnih jednačina naponskog balansa rotorskih namotaja. Napomenimo još jednom da je koordinatni sistem nepomičan, odnosno vezan za stator.

Rotorske jednačine u $\alpha\beta$ stacionarnom koordinatnom sistemu glase:

$$\begin{aligned} 0 &= R_R i_D + \Psi'_D + \hat{\omega}_R \Psi_Q \\ 0 &= R_R i_Q + \Psi'_Q - \hat{\omega}_R \Psi_D \end{aligned} \quad (7)$$

Koristeći se vezom između fluksa rotora i struja:

$$\begin{aligned} \Psi_D &= L_R i_D + L_m i_d \\ \Psi_Q &= L_R i_Q + L_m i_q \end{aligned} \quad (8)$$

dobija se jednačina rotorskog kola izražena preko struja statora i rotorskog fluksa.

$$\begin{aligned} \Psi'_D + \frac{1}{T_R} \Psi_D + \hat{\omega}_R \Psi_Q &= \frac{1}{T_R} L_m i_d \\ \Psi'_Q + \frac{1}{T_R} \Psi_Q - \hat{\omega}_R \Psi_D &= \frac{1}{T_R} L_m i_q \end{aligned} \quad (9)$$

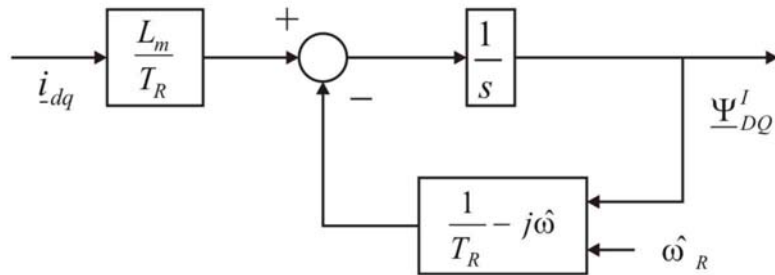
i_d i i_q su komponente merene statorske struje, i_D i i_Q rotorske struje, T_R je vremenska konstanta rotora dok je $\hat{\omega}_R$ ocena brzine obrtanja.

Za $\underline{\Psi}_{DQ}$, ocenjeni rotorski fluks "1- ω " modelom, dobija se:

$$\underline{\Psi}'_{DQ} + \frac{1}{T_R} \underline{\Psi}_{DQ} - j \hat{\omega}_R \underline{\Psi}_{DQ} = \frac{1}{T_R} L_m \underline{i}_{dq} \quad (10)$$

Formula (10) predstavlja matematički model strujnog ("1- ω ") estimatora rotorskog fluksa. Ulazne veličine "1- ω " estimatora su struje statora i procenjena brzina rotora. Na tačnost estimacije fluksa utiču parametri motora, od kojih dominantan uticaj ima vremenska konstanta rotora T_R .

"1- ω " estimator rotorskog fluksa se može predstaviti preko blok dijagrama na sledeći način.



Sl. 4.1. Blok dijagram strujnog estimatora rotorskog fluksa

U "1- ω " estimatoru rotorskog fluksa prema jednačini (10) figuriše brzina obrtanja rotora ω_R pa se ovaj estimator može iskoristiti kao podesivi model. U ovom modelu ne figuriše napon statora već struja, pa se ovaj estimator i označava kao strujni estimator.

5. Diskriminator greške

Kada bi stvarna brzina rotora ω_R bila poznata tada bi se estimirani prostorni vektori fluksa rotora poklapali. Prostorni vektori, uz tačno poznavanje parametara motora, mogu se razlikovati jedino ako postoji razlika između procenjene i stvarne brzine motora.

“UI” estimator se uobičajeno zove referentnim modelom, jer on uspostavlja referentni (željeni) položaj vektora rotorskog fluksa, dok se “I- ω ” estimator ponaša kao kakav podesivi model u kome treba podesiti procenu brzine tako da se izlaz ovoga estimatora poklopi sa referentnim vektorom. “I- ω ” estimator daje osnovu za procenu brzine.

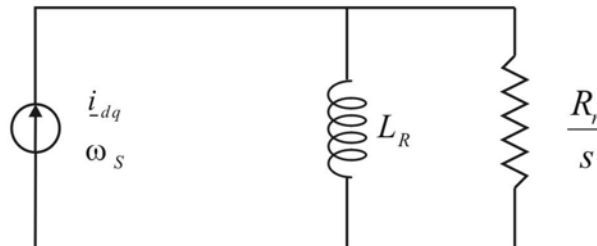
Razmotrimo šta se dešava pri postojanju razlike između zadate brzine rotora ω_R i njene estimacije $\hat{\omega}_R$.

$$\Delta\omega_R = \omega_R - \hat{\omega}_R > 0 \quad (11)$$

Estimirana vrednost brzine $\hat{\omega}_R$ uvek je manja od zadate ω_R .

Fluks $\underline{\Psi}_{DQ}^U$ rotora, dobijen iz “UI” modela ne zavisi od $\hat{\omega}_R$ i odgovara fluksu u samom motoru.

Šta se dešava sa $\underline{\Psi}_{DQ}^I$? “I- ω ” model se “napaja” stujom statora i_{dq} učestanosti ω_S . Uprošćeno rotorsko kolo je prikazano na Sl. 5.1.



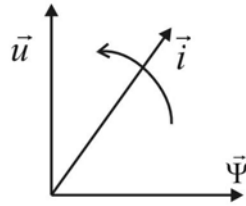
Sl. 5.1. Uprošćeno rotorsko kolo

U zamenskoj šemi za stacionarno stanje rotorskog kola impedansa $\frac{R_S}{s}$ je funkcija klizanja ω_k . Relativno klizanje s je definisano sa:

$$s = \frac{\omega_k}{\omega_S} = \frac{\omega_S - \hat{\omega}_R}{\omega_S} \quad (12)$$

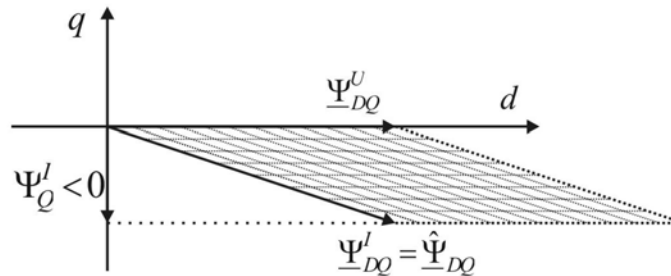
U slučaju kada se procenjena brzina rotora razlikuje od stvarne, relativno klizanje je povećano, jer je $\hat{\omega}_R < \omega_R$. Ovo ima za posledicu da impedansa “I- ω ” modela rotorskog kola postaje manje reaktivna nego impedansa realnog rotorskog kola (dobijenog “UI”

modelom). Samim tim ugao između napona i struje $\angle(\vec{u}, \vec{i})$ opada, dok ugao između struje i fluksa $\angle(\vec{i}, \vec{\Psi})$ raste.



Sl. 5.2. Promena ugla između vektora napona, struje i fluksa pri porastu klizanja

Dakle, posledica $\hat{\omega}_R < \omega_R$ je da se ugao $\angle(i_{dq}, \Psi_{DQ}^I)$ uvećava, odnosno da $\Psi_{DQ}^I \equiv \hat{\Psi}_{DQ}$ zaostaje u odnosu na aktuelni $\Psi_{DQ}^U = \Psi_{DQ}$. Što je grafički prikazano na Sl. 5.3.



Sl. 5.3. Fazorski dijagram estimiranih fluxseva rotora

Sa Sl. 5.3. se vidi da odstupanje estimirane brzine $\hat{\omega}_R$ od željene brzine rotora ω_R se može osmatrati izračunavanjem ugla između željenog fluksa rotora Ψ_{DQ}^U i estimiranog fluksa Ψ_{DQ}^I . Ugao između ova dva fluksa proporcionalan je osenčenoj površini na fazorskom dijagramu (Sl. 5.3.), a što predstavlja intenzitet vektorskog proizvoda datih fluxseva.

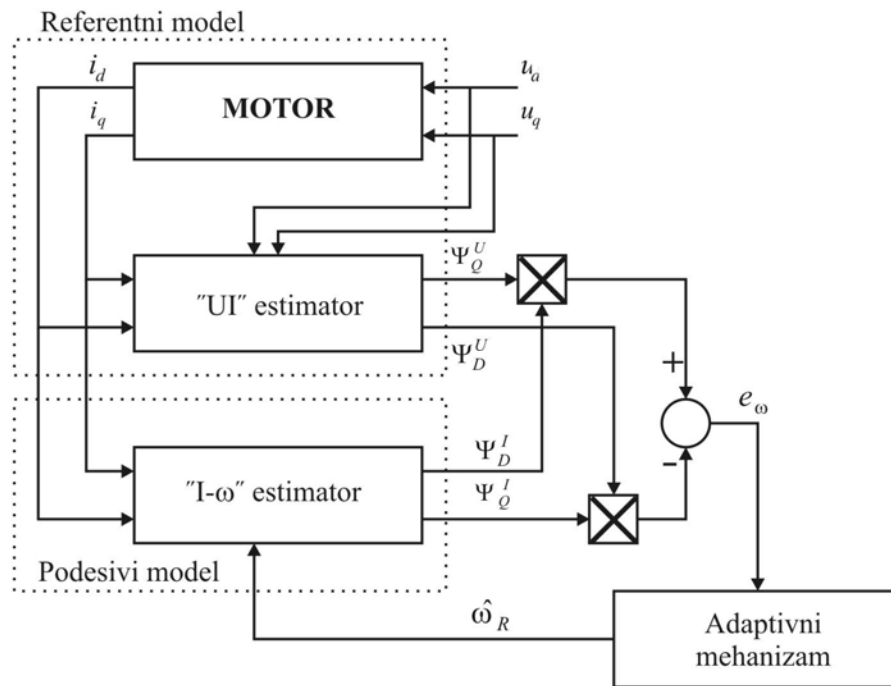
$$\underline{e}_\omega = \Psi_{DQ}^U \times \Psi_{DQ}^I \quad (13)$$

Odnosno, osenčena površina je jednaka:

$$e_\omega = \Psi_D^I \Psi_Q^U - \Psi_Q^I \Psi_D^U \quad (14)$$

Da zaključimo, porastom razlike između željene brzine rotora ω_R i njene estimirane vrednosti $\hat{\omega}_R$ raste zahvaćena površ između željenog vektora fluksa rotora i njegove estimacije. Osenčena površ, dakle, predstavlja željenu informaciju o grešci brzine e_ω .

Na osnovu gore rečenog, blok dijagram za ocenu brzine rotora zasnovan na referentnom modelu rotorskog kola sada izgleda:



Sl. 5.4. Blok dijagram za procenu brzine rotora MRAS opserverom

6. Sinteza adaptivnog mehanizma

Podesivi model predstavlja celinu MRAS observera koja daje mogućnost uvida u valjanost estimirane veličine tj. brzine obrtanja rotora. Svrha adaptivni mehanizam je da prema zadatoj funkciji obezbedi tu estimiranu vrednost brzine na osnovu razlike u vrednostima izabrane veličine u referentnom i podesivom modelu.

Dakle, adaptivni mehanizam vrši korekciju procene brzine na osnovu razlike u faznim stavovima vektora fluksa procenjenih naponskim i strujnim estimatorom.

Postavlja se pitanje kako izabrati adaptivni mehanizam za procenu brzine rotora $\hat{\omega}_R$. Da bi se odredio traženi adaptivni mehanizam potrebno je definisati jednačinu stanja greške. Greška stanja definisana je kao vektorska razlika između stvarne i estimirane vrednosti vektora fluksa rotora.

$$\underline{\varepsilon} = \underline{\Psi}_{DQ}^U - \underline{\Psi}_{DQ}^I \quad (15)$$

Ovako definisana greška stanja osetljiva je kako na razliku amplituda flukseva tako i na razliku njihovih faznih stavova. Informacija o brzini nalazi se u razlici faznih stavova. Dok, nepoznavanje tačne vrednosti parametara motora uslovljava razliku u amplitudi flukseva.

Jednačina stanja greške može se dobiti ako krenemo od formule (10) za ocenjeni rotorski fluks "l- ω " modelom.

$$\begin{aligned} \underline{\Psi}_{DQ}^U + \frac{1}{T_R} \underline{\Psi}_{DQ}^U - j\omega_R \underline{\Psi}_{DQ}^U &= \frac{1}{T_R} L_m \dot{i}_{dq} \\ \underline{\Psi}_{DQ}^I + \frac{1}{T_R} \underline{\Psi}_{DQ}^I - j\hat{\omega}_R \underline{\Psi}_{DQ}^I &= \frac{1}{T_R} L_m \dot{i}_{dq} \end{aligned} \quad (16)$$

Ako je $\underline{\Psi}_{DQ}^U$ ocenjen u korektno podešenom "UI" modelu tada zadovoljava rotorske jednačine u kojima figuriše ω_R , što je zapisano prvom jednačinom.

Oduzimanjem donje jednačine od gornje u (16) dobija se:

$$\underline{\varepsilon}' + \frac{1}{T_R} \underline{\varepsilon} - j(\omega_R \underline{\Psi}_{DQ}^U - \hat{\omega}_R \underline{\Psi}_{DQ}^I) = 0 \quad (17)$$

Gde je $\underline{\varepsilon} = \varepsilon_d + j\varepsilon_q$, a kako važi jednakost:

$$\omega_R \underline{\Psi}_{DQ}^U - \hat{\omega}_R \underline{\Psi}_{DQ}^I = \omega_R \underline{\varepsilon} + (\omega_R - \hat{\omega}_R) \underline{\Psi}_{DQ}^I \quad (18)$$

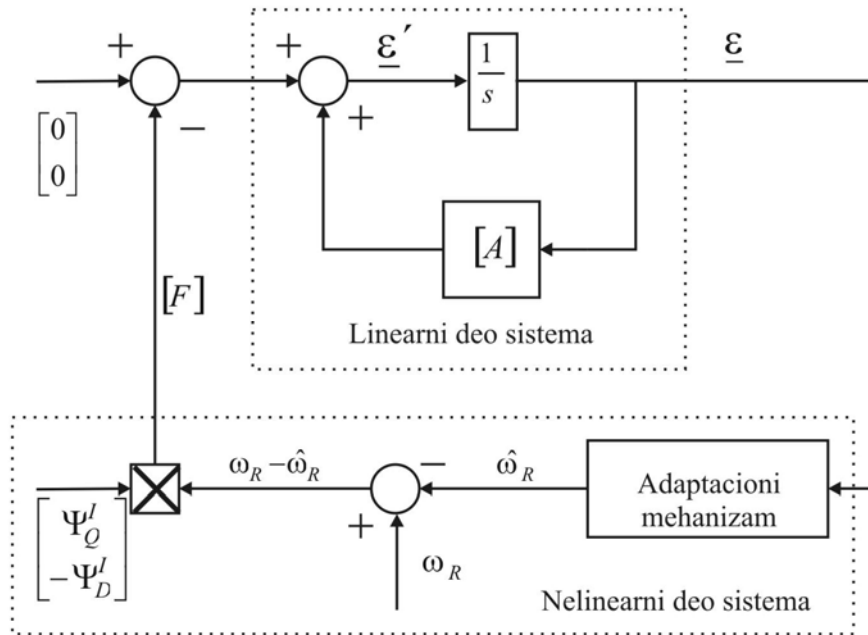
može se pisati:

$$\underline{\varepsilon}' + \frac{1}{T_R} \underline{\varepsilon} - j\omega_R \underline{\varepsilon} - j(\omega_R - \hat{\omega}_R) \underline{\Psi}_{DQ}^I = 0 \quad (19)$$

Ili, zapisano u matičnom obliku:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon'_d \\ \varepsilon'_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{T_R} & -\omega_R \\ \omega_R & -\frac{1}{T_R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_d \\ \varepsilon_q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\Psi_Q^R \\ \Psi_D^R \end{bmatrix} (\omega_R - \hat{\omega}_R) \quad (20)$$

Sistem (20) možemo predstaviti blok dijagramom u kome je jasno izdvojen linearni od nelinearni dela sistema.



Sl. 6.1. Blok dijagram stanja MRAS opservera

Na Sl. 6.1. oznakama $[A]$, $[F]$ i $\underline{\varepsilon}$ date su matrice:

$$\begin{aligned} [A] &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{T_R} & -\omega_R \\ \omega_R & -\frac{1}{T_R} \end{bmatrix} \\ \underline{\varepsilon} = [\varepsilon] &= \begin{bmatrix} \varepsilon_d \\ \varepsilon_q \end{bmatrix} \\ [F] &= \begin{bmatrix} \Psi_Q^I \\ -\Psi_D^I \end{bmatrix} (\omega_R - \hat{\omega}_R) \end{aligned} \quad (21)$$

dok je sa $\hat{\omega}_R$ označena ocenjena brzina obrtanja.

7. Stabilnost sistema

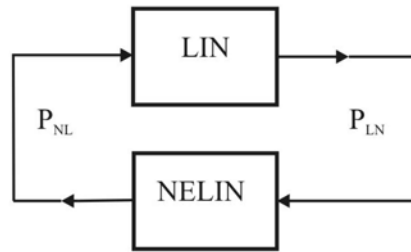
Za realizaciju vektorskog upravljanja pogonom sa primenjenom estimacijom brzine pomoću MRAS observera neophodno je pri izboru adaptivnog mehanizma voditi računa da celekupni sistem ostane stabilan i obezbediti da estimirana veličina konvergira stvarnoj vrednosti sa zadovoljavajućom dinamikom.

Da bi sistem bio stabilan on mora zadovoljavati uslov pasivnosti iskazan formulom:

$$\frac{dW}{dt} \leq 0. \quad (24)$$

Pogledati *Appendix I*.

Kako se sistem posmatra kao autonoman, odnosno ulaz u sistem je $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, logički izgled sistema je dat na slici.



Sl. 7.1. Logički izgled sistema

Uslov za stabilan rad se može iskazati definicijom:

Ukoliko je u intervalu od $[0 \dots t_1]$ za svako $t_1 \in [0 \dots +\infty]$ iznos energije koji "LIN" podsistem (odnosno "NELIN" podsistem) emituje u "NELIN" podsistem (odnosno "LIN" podsistem) definisan formulom:

$$\int_0^{t_1} P_{LN} dt \leq \gamma_0^2 \quad \text{tj.} \quad (22)$$

$$\int_0^{t_1} P_{NL} dt \leq \gamma_0^2$$

gde je γ_0 pozitivna konstanta, tada je onemogućeno kontinualno uvećanje energije

$W = \sum_{i=1}^N x_i^2$ oba sistema.

Predhodna definicija će biti zadovoljena ukoliko važi pasivnost “LIN” i “NELIN” dela sistema. Dakle, da bi važio $\frac{dW}{dt} \leq 0$ mora biti zadovoljen uslov:

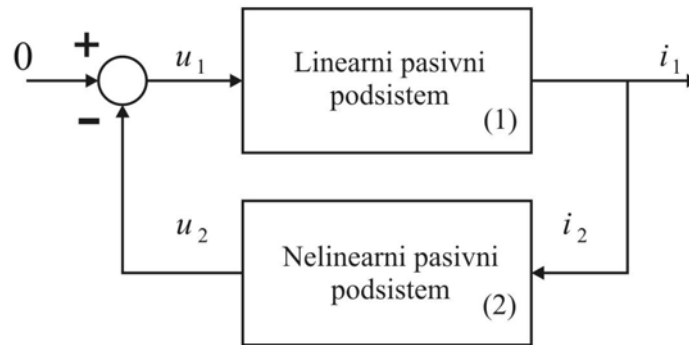
$$\frac{\text{LIN}}{\text{NELIN}} \Leftrightarrow \frac{\text{POZITIVNO REALNA FUNKCIJA}}{\text{PASIVNA FUNKCIJA}}$$

Landau I. D. je dao jedan praktičan pristup u izboru adaptivnog mehanizma pri estimaciji brzine primenom MRAS observera, a koji se zasniva na konceptu hiperstabilnosti. Kada se adaptivni mehanizam izabere prema ovom pristupu, jednačina greške stanja MRAS observera je globalno asimptotski stabilna. Napomenimo da Landauov metod sinteze adaptivnog mehanizma kandiduje strukturu adaptivnog mehanizma, ali ništa ne govori o dinamici konvergencije procesa estimacije.

Stabilnost po **LANDAU**:

Autonomni sistem sa dva striktno pasivna podsistema vezna na red, linearnim (“LIN”) blokom u direktnoj grani i nelinearnim (“NELIN”) blokom u povratnoj grani, je hiperstabilan pod uslovom da je “LIN” blok striktno pozitivno realan, dok “NELIN” blok mora zadovoljavati **Popovljev** kriterijum hiperstabilost, koji glasi:

$$\int_0^{t_1} [\text{ulaz}]^T [\text{izlaz}] dt \geq -\gamma_0^2 \quad (\forall t_1 \geq 0) \quad (23)$$



Sl. 7.2. Logički blok dijagram sistema MRAS opservera brzine

Prema Sl. 7.2. formula (23) glasi:

$$\int_0^{t_1} i_2 \cdot u_2 dt \geq -\gamma_0^2 \quad (\forall t_1 \geq 0) \quad (24)$$

što zapravo predstavlja snagu injektiranu u nelinearni pasivni podsistem.

Pogledati *Appendix II*.

8. Dokaz stabilnosti

8.1. Linearni podsistem – pozitivno realna funkcija

Najpre ćemo proveriti kriterijum hiperstabilnosti koji se odnosi na linearni deo sistema, tj. linearni podsistem mora biti striktno pozitivno realan. Matrica funkcije prenosa linearnog sistema je:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B \quad (25)$$

Kako u ovom slučaju za linearni podsistem važi da je $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, a C jedinična matrica, onda se može definisati funkcija prenosa kao:

$$W(s) = (sI - A)^{-1} \quad (26)$$

Linearni podsistem "LIN" je striktno pozitivan realan sistem akko je matrica $W(j\omega) + W^T(-j\omega)$ striktno pozitivno definitna hermitska¹ matrica. Pogledati *Appendix III*.

$$W(j\omega) + W^T(-j\omega) = \frac{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}}{f_1(\omega)} \quad (27)$$

Koeficijenti matrice dati su sa:

$$\begin{aligned} a_{11} = a_{22} &= 2 \frac{\omega_R^2}{T_R} + \frac{2}{T_R^3} + 2 \frac{\omega^2}{T_R} \\ a_{12} = -a_{21} &= j \cdot 4 \cdot \frac{\omega \omega_R}{T_R} \end{aligned} \quad (28)$$

Dok je funkcija $f_1(\omega)$ data sa:

$$f_1(\omega) = \left(\omega_R^2 + \frac{1}{T_R} - \omega^2\right)^2 + \left(\frac{2\omega}{T_R}\right)^2 \quad (29)$$

Na osnovu koeficijenata matrice može se zaključiti da je matrica $W(j\omega) + W^T(-j\omega)$ hermitski simetrična i pozitivno definitna za svako ω . Na osnovu čega sledi da je "LIN" podsistem striktno pozitivno realan, pa je kriterijum hiperstabilnosti u direktnoj grani zadovoljen.

Uslov da je linearan podsistem striktno pozitivan realan sistem može se proveriti i alternativno korišćenjem analitičkog testa. Ispituje se svaka od četiri funkcije prenosa po obrascu datom za $W_{11}(s)$:

¹ *Definicija hermitske matrice:* Kažemo da je matrica A hermitska ili hermitski simetrična ako važi $A^* = A$ tj. jednaka je svojoj adjungovanoj matrici.

$$W_{11}(s) = \frac{s + \frac{1}{T_R}}{\left(s + \frac{1}{T_R}\right)^2 + \omega_R^2} = \frac{B(s)}{A(s)} \quad (30)$$

$$W_{11}(j\omega) = \frac{B(j\omega)A(-j\omega)}{A(j\omega)A(-j\omega)}$$

Zatim se definiše funkcija $f_{11}(\omega)$ kao:

$$f_{11}(\omega) = \operatorname{Re}(B(j\omega)A(-j\omega)) \quad (31)$$

za koju mora važiti uslov $f_{11}(\omega) \geq 0$ za svako ω . Izračunavanjem se dobija

$$f_{11}(\omega) = \frac{\omega^2}{T_R} + \frac{\omega_R^2}{T_R} + \frac{1}{T_R} \geq 0 \quad (32)$$

pa je uslov zadovoljen.

Proverom ostale tri funkcije prenosa istim postupkom dokazuje se da je linearni podsistem striktno pozitivno realan.

8.2. Nelinearni podsistem – pasivna funkcija

U predhodnom poglavlju je pokazano da je linearni podsistem striktno realno pozitivna funkcija, da bi sistem zasnovan na referentnom modelu rotorskog kola bio stabilan mora se pokazati i da je nelinearni ("NELIN") podsistem pasivan. Radi preglednosti prepisimo Popovljev kriterijum hiperstabilnosti.

$$S = \int_0^{t_1} [\text{ulaz}]^T [\text{izlaz}] dt \geq -\gamma_0^2 \quad (\forall t_1 \geq 0) \quad (33)$$

Ulazna matrica u nelinearni deo sistem prikazan na Sl. 6.1. je $\underline{\varepsilon}$, a izlazna [F], definisane formulama (21). Napišimo ih još jednom u obliku pogodnijim za dalju analizu:

$$\begin{aligned} \underline{\varepsilon} = [\varepsilon] &= \begin{bmatrix} \varepsilon_d \\ \varepsilon_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Psi_D^U - \Psi_D^I \\ \Psi_Q^U - \Psi_Q^I \end{bmatrix} \\ \mathbf{F} = [F] &= (\omega_R - \hat{\omega}_R) \begin{bmatrix} \Psi_Q^I \\ -\Psi_D^I \end{bmatrix} \\ \mathbf{F} &= -\Delta\omega \cdot \mathbf{J} \cdot \underline{\Psi}_{DQ}^I \end{aligned} \quad (34)$$

gde su matrice \mathbf{J} i $\underline{\Psi}_{DQ}^I$ definisane na sledeći način:

$$\begin{aligned} \underline{\Psi}_{DQ}^I &= \begin{bmatrix} \Psi_D^I \\ \Psi_Q^I \end{bmatrix} \\ \mathbf{J} &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (35)$$

Dakle, integral Popova je:

$$S = \int_0^{t_1} \underline{\varepsilon}^T \cdot \mathbf{F} dt \geq -\gamma_0^2 \quad (\forall t_1 \geq 0) \quad (36)$$

Ako zamenimo vrednost izlaznog vektora \mathbf{F} sa formulom datom u (34), integral glasi:

$$S = \int_0^{t_1} -\Delta\omega (\underline{\varepsilon}^T \cdot \mathbf{J} \cdot \underline{\Psi}_{DQ}^I) dt \geq -\gamma_0^2 \quad (\forall t_1 \geq 0) \quad (37)$$

Za izraz u zagradi se dalje može pisati:

$$\underline{\varepsilon}^T \cdot \mathbf{J} \cdot \underline{\Psi}_{DQ}^I = \begin{bmatrix} \Psi_D^U - \Psi_D^I & \Psi_Q^U - \Psi_Q^I \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Psi_D^I \\ \Psi_Q^I \end{bmatrix} \quad (38)$$

množenjem matrica i jednostavnim sređivanjem dobija se:

$$\underline{\varepsilon}^T \cdot \mathbf{J} \cdot \underline{\Psi}_{DQ}^I = \Psi_D^I \Psi_Q^U - \Psi_Q^I \Psi_D^U = e_\omega \quad (39)$$

što predstavlja signal greške e_ω .

Za signal greške smo, dakle, usvojili intenzitet vektorskog proizvoda flukseva procenjenih naponskim i strujnim estimatorom, ako sada za adaptivni mehanizam kojim se procenjuje brzina usvoji **PI regulator**, za procenjenju brzinu možemo pisati:

$$\begin{aligned} |e_\omega| &= \left| \underline{\Psi}_{DQ}^I \times \underline{\Psi}_{DQ}^U \right| = \Psi_D^I \Psi_Q^U - \Psi_Q^I \Psi_D^U \\ \hat{\omega}_R &= \left(K_P + \frac{K_I}{s} \right) e_\omega \end{aligned} \quad (40)$$

Usvajanjem PI mehanizma estimacije brzine obezbeđeno je da u stacionarnom stanju vrednost signala greške e_ω jednaka nuli, a da su vektori estimiranog rotorskog fluksa naponskim i strujnim estimatorom kolinearni. Dakle, obezbeđeno je da u stacionarnom stanju osenčena površ na Sl. 5.3. bude jednaka nuli. Međutim, estimator brzine prema formuli (40) ne zahteva da su amplitude ova dva vektora fluksa rotora iste.

Sada integral Popova, uz uvažavanje činjenice da je $\Delta\omega = (\omega_R - \hat{\omega}_R)$, dobija oblik:

$$S = -\int_0^{t_1} e_\omega \Delta\omega dt = -\int_0^{t_1} e_\omega(t) \left(\omega_R - K_P e_\omega(t) - K_I \int_0^t e_\omega(t) dt \right) dt \quad (41)$$

Da bi smo dokazali Popovljev kriterijum stabilnosti moramo uvesti pretpostavku da je brzina koju ocenjujemo, tj. brzina rotora ω_R , konstantana.

Integral Popova:

$$S = -\underbrace{\int_0^{t_1} e_\omega(t) \left(\omega_R - K_I \int_0^t e_\omega(t) dt \right) dt}_{S_1} + \underbrace{\int_0^{t_1} K_P e_\omega(t) dt}_{S_2} \quad (42)$$

je ograničen ako su ograničeni integrali S_1 i S_2 .

Ako je $K_P > 0$, za integral S_2 je očigledno da je veći od nule.

Da bi pokazali da je S_1 ograničen potrebno je uvažiti da je:

$$\int_0^{t_1} k \cdot f(t) \cdot \left\{ \frac{df(t)}{dt} \right\} dt = \frac{k}{2} \cdot \{ f^2(t) - f^2(0) \} \geq -\frac{k}{2} f^2(0) \quad (43)$$

Pogodno je za funkciju $f(t)$ odabrati sledeću funkciju:

$$f(t) = K_I \int_0^t e_\omega(t) dt - \omega_R \quad (44)$$

Prvi izvod ovako definisane funkcije $f(t)$ je:

$$f'(t) = \frac{df(t)}{dt} = K_I \cdot e_\omega(t) \quad (45)$$

Ovde je iskorišćena pretpostavka da je brzina rotora ω_R konstantana. Sada se za integral S_1 može pisati:

$$\int_0^{t_1} \left(-\omega_R \cdot e_\omega(t) + K_I \cdot e_\omega(t) \cdot \int e_\omega(t) dt \right) dt = \int_0^{t_1} \frac{f'(t)}{K_I} \left(K_I \int e_\omega(t) dt - \omega_R \right) dt =$$

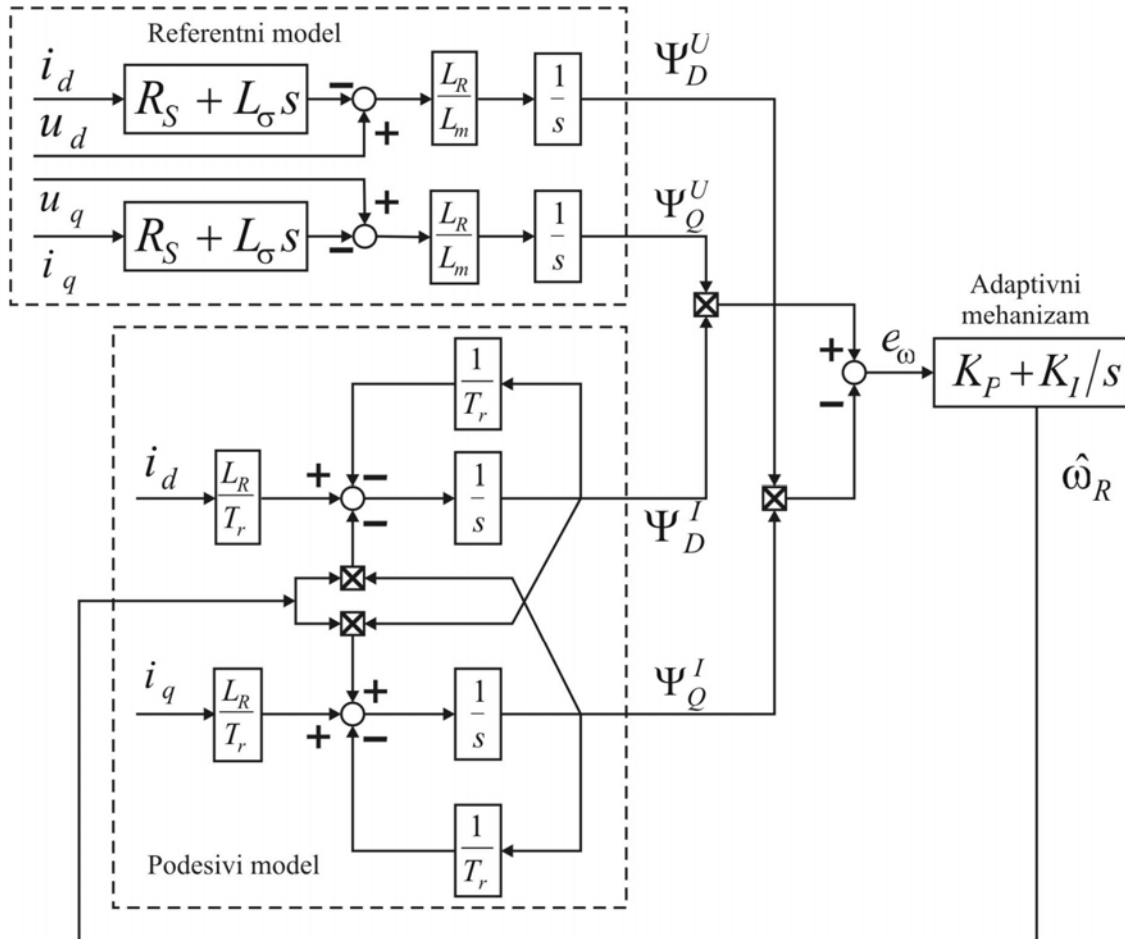
$$\frac{1}{K_I} \int_0^{t_1} f'(t) \cdot f(t) dt = \frac{1}{K_I} \int_{f(0)}^{f(t_1)} f(t) df = \frac{1}{2K_I} \left(f^2(t_1) - f^2(0) \right) \geq \frac{f(0)}{2K_I} \quad (46)$$

Čime je dokazano da je S_1 ograničeno, odnosno da je integral Popova ograničen sa donje strane.

Ovim je u potpunosti zadovoljen Popovljev kriterijum hiperstabilnost nelinearnog pasivnog podsistema sa adaptivni mehanizam u obliku PI regulatora. Kako je nelinearni deo sistema ("NELIN") pasivan, a linearni ("LIN") striktno pozitivno realan, sistem za ocenu brzine obrtanja trofaznog asihronog motora zasnovanog na referentnom modelu rotorskog kola, je hiperstabilan odnosno asimptotski stabilan.

9. Blok dijagram i rezultati simulacije

Na Sl. 9.1. dat je potpuni blok dijagram MRAS opservera brzine obrtanja rotora asinhronog motora.

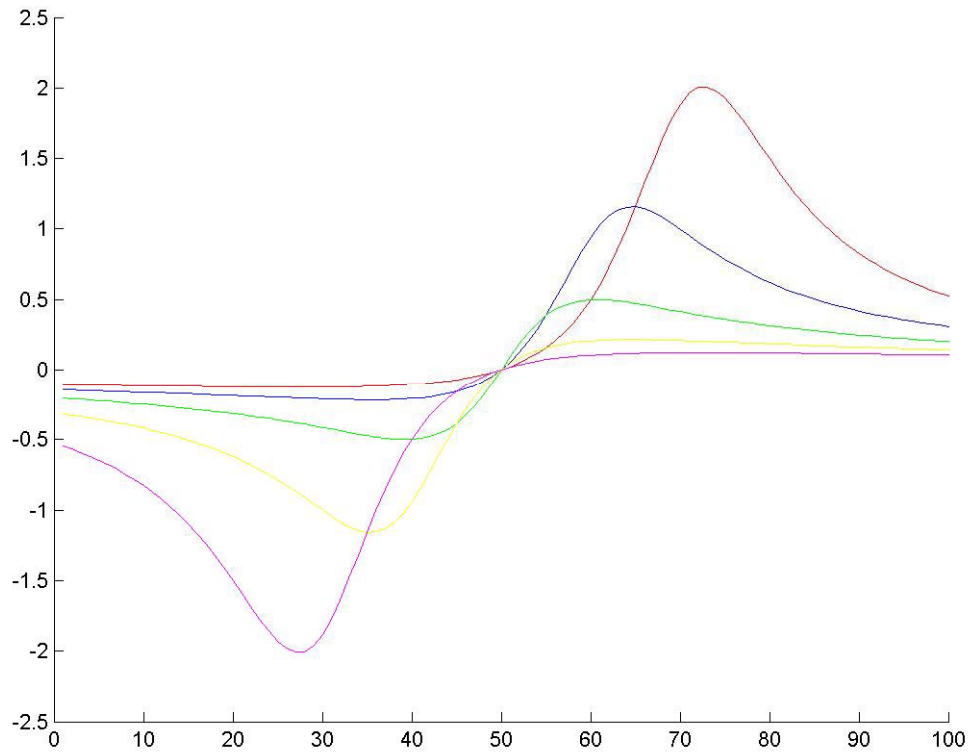


Sl. 9.1. Blok dijagram MRAS opservera brzine

U nastavku sledi M fajl, za simulaciju MRAS opservera brzine u MATLAB-u.

```
% MRAS speed estimation based on Err=Flux(IW_model) X Flux(UI_model)
% the program tests the error signal dependence from Wr estimated
% (i.e. form the error Wr - Wr_est) for several values of load/slip;
% it is assumed id=const in dq sync frame and iq = 1/Tr * slip
Lm = 2; Tr = 0.3; % Tr in seconds
Wnom = 314.15926; % Rated speed
Wr = 0.5 * Wnom; % Actual rotor speed
figure; hold on;
for index = 1 : 5
    Slip = -0.03 + index * 0.01; % Slip = % Relative slip.
    id = 0.5; iq = id * Tr * Slip * Wnom; % Components of the stator current
    is = id + 1i * iq; % in d-q synchronouse frame
    x = 1 : 100; Wk = ( x - 50 ) * 0.001 * Wnom + Slip * Wnom; % Wk = slip
    fmras = Lm * is ./ ( 1 + i * Tr .* Wk ); % rotor MRAS flux, D == real Q == j
    x = ones ( 1, 100 ); Wk = x * Slip * Wnom; fok = Lm * is ./ ( 1 + i * Tr .* Wk );
    fmras = conj ( fmras ); % error imaginary of fok .* conj ( fmras )
    err = imag ( fok .* fmras ); % error is scalar, Fd * Fqmras - Fq * Fdmras
    Error ( index, : ) = err;
end
plot ( Error ( 1, : ), 'r' );
plot ( Error ( 2, : ), 'b' );
plot ( Error ( 3, : ), 'g' );
plot ( Error ( 4, : ), 'y' );
plot ( Error ( 5, : ), 'm' );
```

Na Sl. 9.2. je prikazan rezultat simulacije MRAS opservera brzine obrtanja rotora asinhronog motora u MATLAB-a.



Sl. 9.2. Rezultati simulacije za nekoliko vrednosti klizanja

10. Zaključak

U tekstu je prikazan MRAS opserver za procenu brzine obrtanja rotora asihronog motora. Procena brzine MRAS opservera zasnovana je na redundansi. Korišćeni su dva međusobno nezavisna estimatora za procenu fluksa rotora, "UI" estimator zasnovan na jednačinama naponskog balansa statorskih namotaja i "I- ω " estimator zasnovan na jednačinama naponskog balansa rotorskih namotaja.

Zatim je definisana greška stanja kao razlika estimiranih flukseva. Za adaptivni mehanizam za svođenje greške estimiranih flukseva na brzinu rotora odabran je PI regulator.

Za dobijeni sistem stanja greške definisana je hiperstabilnost rešenja i hiperstabilnost dva na red vezana striktno pasivna sistema. Da bi sistem bio hiperstabilan bilo je potrebno pokazati da linearni podsistem u direktnoj grani sistema striktno realno pozitivna funkcija, dok nelinearni podsistem u povratnoj grani zadovoljava Popovljev kriterijum hiperstabilnosti. Primenom teorije pasivnosti i teorije hiperstabilnosti pokazana je stabilnost predložene MRAS strukture.

Predloženi model MRAS opservera može se koristiti u pogonima sa asihronim motorima u kojim se želi izbeći upotreba davača brzine, čime se dobija na pouzdanosti, a složenost sistema se smanjuje.

Appendix I

Pasivnost linearnih i nelinearnih sistema

Za sistem kažemo da je pasivan ako zadovoljava uslov:

$$W(t_0) + a(t_0, t) \geq 0 \quad (\text{A1.1})$$

gde je $W(t_0)$ akumulisana energija sistema u trenutku t_0 , dok je

$$a(t_0, t) = \int_{t_0}^t da(\tau) = \int_{t_0}^t p(\tau) d\tau \quad (\text{A1.2})$$

električni rad koji se spolja ulaže u sistem u intervalu $[t_0, t]$.

Trenutna ulazna snaga sistema u trenutku t opisana naponima i strujama na njenim pristupima, za usaglašene smerove, iznosi:

$$p(t) = \mathbf{u}^T(t) \cdot \mathbf{i}(t) = \mathbf{i}^T(t) \cdot \mathbf{u}(t) \quad (\text{A1.3})$$

Tako se uslov pasivnosti (A1.1) može pisati u obliku:

$$W(t_0) + \int_{t_0}^t \mathbf{u}^T(t) \cdot \mathbf{i}(t) d\tau \geq 0 \quad (\text{A1.4})$$

Kako je uobičajeno da se posmatra ustaljen periodičan sistem, pasivnost sistema se može definisati i srednjom ulaznom snagom (poznatom i pod nazivom aktivna snaga):

$$P = \frac{a(t_0, t)}{t - t_0} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^t \mathbf{u}^T(t) \cdot \mathbf{i}(t) d\tau \quad (\text{A1.5})$$

tada za sistem bez akumulisane energije kažemo da je striktno pasivan ako važi $P > 0$.

Na osnovu formule (A3.1) možemo zaključiti da sistem može posedovati početnu energiju $W(t_0)$ i elemente sa gubicima na kojima se energija sistema disipira, ali on ne sme sadržati izvore energije (kao što su npr. strujni i naponski izvori) koji će tu energiju uvećati. Matematički se može zapisati:

$$\frac{dW(t)}{dt} \leq 0 \quad (\forall t > t_0). \quad (\text{A1.6})$$

koristeći se činjenicom da energija sistema mora opadati sa vremenom, odnosno da je priraštaj energije sistema negativan.

Linearni sistem:

Za funkciju $f(x)$ kažemo da je linearna ako zadovoljava sledeća dva uslova:

1. Aditivnost: $f(x + y) = f(x) + f(y)$
2. Homogenost: $f(ax) = af(x)$.

Ako je $f(x)$ linearna funkcija sistema, α i β skalari, a $x_1(t)$ i $x_2(t)$ proizvoljni ulazni signali sistema, za sistem kažemo da je linearan ako zadovoljava jednakost:

$$f(\alpha \cdot x_1 + \beta \cdot x_2) = \alpha \cdot f(x_1) + \beta \cdot f(x_2). \quad (\text{A1.7})$$

Dakle, sistem koji zadovoljava uslov aditivnosti i homogenosti nazivamo linearan sistem, odnosno linearni sistem je sistem koji poseduje svojstvo superpozicije.

Za vremenski invarijantan linearan sistem, pasivnost je ekvivalentna "pozitivnoj realnosti" funkcije prenosa. Pogledati *Appendix III*.

Za primer pasivnih linearnih sistema možemo uzeti proizvoljno RLC kola. Kada napišimo prenosnu funkciju takvog kola:

$$Y(s) = G(s) \cdot X(s).$$

i kako se svi polovi funkcije prenosa nalaze u levoj poluravni, možemo zaključiti da je sistem pasivan.

Nelinearni sistemi:

Za sistem koji ne zadovoljava uslov superpozicije kažemo da je nelinearan sistem.

Pasivnost nelinearnog sistema definiše se na isti način kao i pasivnost linearnog. Dakle, za nelinearne pasivan sisteme mora važiti uslov da je priraštaj energije negativan, odnosno da je energija koju sistema emituje u intervalu od proizvoljnog trenutka t_0 do beskonačnosti konačna.

Appendix II

Hiperstabilnost

Definicija hiperstabilnosti:

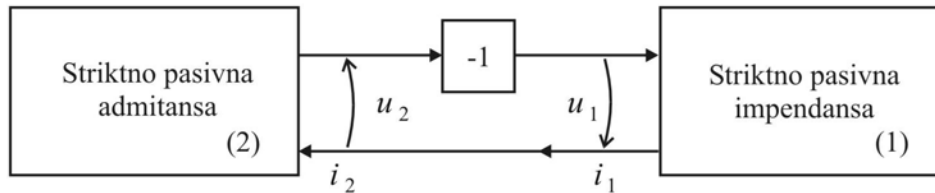
Rešenje

$$X[x(0), t]$$

je hiperstabilno ako postoje pozitivne konstante δ i γ_0 takve da važe:

$$\|X(t)\| < \delta \|X(0) + \gamma_0\|; \quad \forall t \geq 0. \quad (\text{A2.1})$$

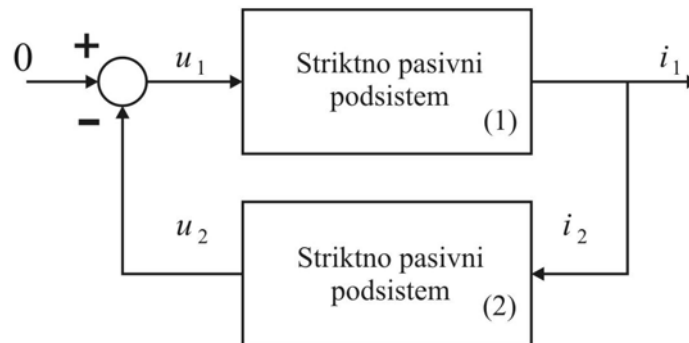
Hiperstabilnost dva serijski povezana pasivna sistema.



Sl. A1. Dva serijski povezana pasivna sistema

Ulaza u sistem (1) je u_1 a izlaz i_1 , dok je ulaz u sistem (2) i_2 a izlaz u_2 .

Sistem se može predstaviti blok dijagramom:



Sl. A2. Blok dijagram sistema

Ako za energiju dovedenu u sistem (1) važi:

$$E_1 = \int_0^t u_1(t) \cdot i_1(t) dt \geq -\gamma_0^2 \quad (\text{A2.2})$$

tada energija koju emituje sistem (2) zadovoljava:

$$E_2 \leq -\gamma_0^2 \quad (\text{A2.3})$$

Odnosno, onemogućeno je kontinualno uvećanje energije u oba sistema.

Kako su oba sistema striktno pasivna, to za energiju dovedenu u pojedinačne sisteme u intervalu $[0, t]$ važi:

$$\begin{aligned} E_1(0, t) &> E_1(t) - E_1(0) - \gamma_0^2 \\ E_2(0, t) &> E_2(t) - E_2(0) - \gamma_0^2 \end{aligned} \quad (\text{A2.4})$$

Na osnovu spoja ta dva sistema:

$$E_1(0, t) = -E_2(0, t) \quad (\text{A2.5})$$

Za ukupnu energiju E sadržanu u sistemu važi:

$$E_1(0) + E_2(0) + 2\gamma_0^2 > \underbrace{E_1(t) + E_2(t)}_{E(t)} \quad (\text{A2.5})$$

Ako je $\gamma_0 = 0$, tada je:

$$E(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} E(t) = 0 \quad (\text{A2.6})$$

pa je ukupan sistem asimptotski stabilan.

Ako je $\gamma_0 \neq 0$, tada je:

$$E(\infty) < E(0) + 2\gamma_0^2 \quad (\text{A2.7})$$

pa je ukupan sistem hiperstabilan.

Appendix III

Pozitivno realne funkcije prenosa

Definicija pozitivne realne funkcije prenosa:

Kompleksna funkcija $G(s)$ je pozitivna realna funkcija ako je:

1. $G(s)$ realno za svako s realno
2. $\operatorname{Re}(G(s)) \geq 0$ za $\operatorname{Re}(s) \geq 0$

Kompleksna funkcija $G(s)$ je pozitivna "striktno" realna ako važi da je $G(s - \varepsilon)$ realna pozitivna funkcija za $\varepsilon > 0$.

Predpostavimo da je $G(s)$ racionalna funkcija.

$$G(s) = \frac{B(s)}{A(s)}$$

Da bi ovako definisana funkcija bila pozitivno realna ona mora zadovoljavati sledeće uslove:

1. $G(s)$ mora biti realno za realno s . Denominator $A(s)$ je stabilan ili ima polove na $j\omega$ osi. Ako $G(s)$ ima polove na $j\omega$ osi, oni moraju biti prosti i imati realne pozitivne ostatke.
2. $\operatorname{Re}(G(j\omega)) \geq 0$, tj. realni deo $G(s)$ je pozitivan na $j\omega$ osi.

Analitički test:

Ako se $\operatorname{Re}(G(j\omega))$ zapiše kao:

$$\operatorname{Re}(G(j\omega)) = \operatorname{Re} \left(\frac{B(j\omega)A(-j\omega)}{A(j\omega)A(-j\omega)} \right)$$

imenioc je pozitivan, a takođe $G(j\omega)$ je simetričan u odnosu na $\omega = 0$. Ostaje da se proverí da li je $f(\omega) = \operatorname{Re}(B(j\omega)A(-j\omega))$ ne negativna za $\omega \geq 0$