

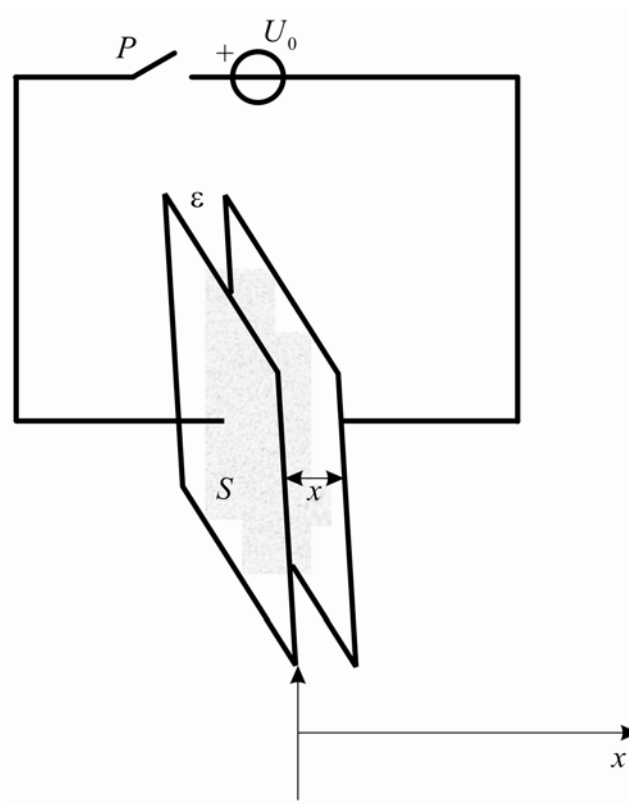
Električne mašine

Računske vežbe

EMP

MJSS

1. zadatak– rešenje



a)

U toku ovog procesa, ostvarena je razmena energije koja se, shodno zakonu o održanju energije, može zapisati kao:

$$\Delta W_i = \Delta W_e + \Delta W_{meh},$$

gde navedene oznake imaju značenja data u tekstu zadatka. Promena energije izvora (energija koju je izvor predao sistemu u toku kretanja između početnog (1) i krajnjeg stanja (2)) je:

$$\Delta W_i = U_0 \cdot Q_2 - U_0 \cdot Q_1 = U_0^2 \cdot (C_2 - C_1)$$

$$\Delta W_i = U_0^2 \cdot \left(\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot \frac{S}{x + \Delta x} - \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot \frac{S}{x} \right)$$

$$\Delta W_i = -\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot U_0^2 \cdot S \cdot \frac{\Delta x}{x \cdot (x + \Delta x)}$$

Promena energije električnog polja:

$$\Delta W_e = W_{e,2} - W_{e,1} = \frac{1}{2} \cdot C_2 \cdot U_0^2 - \frac{1}{2} \cdot C_1 \cdot U_0^2$$

$$\Delta W_e = -\frac{1}{2} \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot U_0^2 \cdot S \cdot \frac{\Delta x}{x \cdot (x + \Delta x)}$$

$$\Delta W_e = \frac{1}{2} \Delta W_i$$

Dakle, dobijamo da je izvršeni mehanički rad jednak:

$$\Delta W_{meh} = \Delta W_i - \Delta W_e = -\frac{1}{2} \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot U_0^2 \cdot S \cdot \frac{\Delta x}{x \cdot (x + \Delta x)}$$

Da bi se odredila vrednost sile koja deluje na svaku od ploča, treba pretpostaviti da je priraštaj Δx infinitezimalan ($\Delta x \rightarrow 0$). Tada je sila koja deluje na svaku od ploča:

$$F(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta W_{meh}}{\Delta x} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot S \cdot U_0^2}{x^2}$$

Posledica: U uslovima u kojima je priključen izvor, koji održava konstantan napon na pločama kondenzatora, energija koja se preda sistemu iz izvora se raspodeljuje na dva jednaka dela od koji jedan odlazi na promenu energije električnog polja, a drugi na vršenje mehaničkog rada. Kako je sila definisana brzinom razmene energije sa mehaničkim podsistemom pri linijskom pomeranju pokretnih delova, to se sila može izračunati i kao:

$$F(x) = \frac{dW_e(x)}{dx}$$

Drugim rečima, iako sila ne nastaje kao direktna posledica promene energije akumulisane u sprežnom polju, već vršenjem rada (promenom energije mehaničkog podsistema), numerička vrednost koja se dobija i pomoću ovog izraza je identična stvarnoj vrednosti sile:

$$F(x) = \frac{dW_e(x)}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2} \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot \frac{S}{x} U_0^2 \right) = -\frac{1}{2} \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot \frac{S}{x^2} \cdot U_0^2$$

Negativan predznak nam kazuje da ova sila teži da pokrene pokretni deo mehaničkog podsistema tako da se koordinata x smanji.

b)

Jednakost koja opisuje razmenu energije u ovom slučaju glasi:

$$0 = \Delta W_e + \Delta W_{meh} \Rightarrow \Delta W_{meh} = -\Delta W_e$$

tj. rad se vrši na račun promene energije električnog polja. Kako je prekidač otvoren, to je naelektrisanje kondenzatora sve vreme nepromenjeno i jednako vrednosti koju je kondenzator posedovao u trenutku otvaranja prekidača:

$$Q = Q_0 = U_0 \cdot C_0 = U_0 \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot \frac{S}{x_0}, \text{ gde je, za konkretni slučaj, } x_0 = x.$$

Zbog toga je izvršeni mehanički rad u odnosu na usvojeni referentni smer:

$$\Delta W_{meh} = -\Delta W_e = -\frac{1}{2} \left(\frac{Q_0^2}{C_2} - \frac{Q_0^2}{C_1} \right)$$

$$\Delta W_{meh} = - \left(\frac{Q_0^2}{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot \frac{S}{x + \Delta x}} - \frac{Q_0^2}{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot \frac{S}{x}} \right)$$

$$\Delta W_{meh} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{Q_0^2 \cdot \Delta x}{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot S}$$

Negativan predznak u prethodnom izrazu govori da se električne sile opiru kretanju (tj. sila je negativna)

Naravno, kako je otvaranjem prekidača izvor odvojen od kondenzatora, to je:

$$\Delta W_i = 0.$$

Sila koja deluje na svaku od ploča:

$$F(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta W_{meh}}{\Delta x} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{Q_0^2}{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot S}.$$

Do istog rezultata se moglo doći i preko formule:

$$F(x) = \frac{dW_{meh}(x)}{dx} = -\frac{dW_e(x)}{dx}.$$

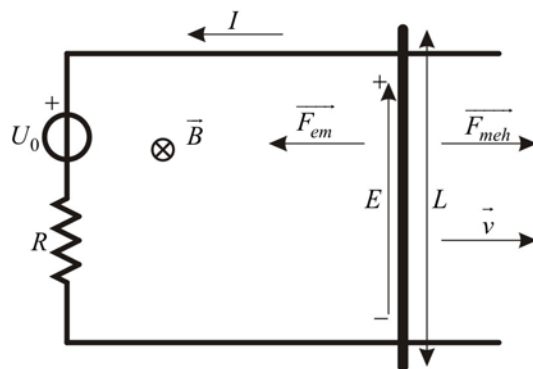
Napomena: Na ispitu ili kolokvijumu, nije potrebno imati bilo kakvu rekapitulaciju teorije, niti detaljne opise kakvi su u rešenju dati radi boljeg razumevanja. Potrebno je, međutim, dati objašnjenja tipa:

kako je rad izvora jednak nuli, to je $\Delta W_e = -\Delta W_{meh}$ te je $F(x) = \Delta W_{meh} / \Delta x = \dots$ etc. etc.

2. zadatak– rešenje

a)

U provodniku koji se kreće u homogenom magnetnom polju postoji elektromotorna sila koja se može izraziti kao skalarni proizvod vektora dužine provodnika \vec{L} i vektorskog proizvoda $\vec{v} \times \vec{B}$ brzine \vec{v} i magnetne indukcije \vec{B} : $E = \vec{L} \cdot (\vec{v} \times \vec{B})$. Pošto je vektor magnetne indukcije \vec{B} normalan na provodnik, a pri tome je normalan i na pravac kretanja, tada je elektromotorna sila koja se ima na krajevima provodnika jednaka: $E = L \cdot B \cdot v$



Intenzitet struje u kolu je :

$$I = \frac{E - U_0}{R} = \frac{L \cdot v \cdot B - U_0}{R}.$$

Na provodnik dužine \$L\$, u kome postoji struja \$I\$, u homogenom magnetnom polju \$\vec{B}\$,

deluje elektromagnetska sila \$\vec{F}_{em}\$ koja se može izraziti kao proizvod struje \$I\$ i

vektorskog proizvoda \$(\vec{L} \times \vec{B})\$, **gde je** \$\vec{L}\$ vektor dužine provodnika, a \$\vec{B}\$ vektor magnetne

indukcije. Ako je vektor magnetne indukcije \$\vec{B}\$ normalan na provodnik onda je

elektromagnetska sila (H.A.Lorentz) koja deluje na provodnik \$F_{em} = L \cdot B \cdot I\$.

Pošto se šipka kreće konstantnom brzinom, onda je elektromagnetska sila, definisana Lorencovim obrascem u ravnoteži sa spoljašnjom mehaničkom silom koja vuče šipku :

$$F_{em} = F_{meh} \Rightarrow F_{meh} = F_{em} = L \cdot B \cdot I = L \cdot B \cdot \frac{L \cdot v \cdot B - U_0}{R}$$

Iz poslednjeg izraza se izračunava potrebna vrednost elektromotorne sile jednosmernog naponskog generatora, \$U_0\$:

$$U_0 = L \cdot v \cdot B - \frac{F_{meh} \cdot R}{L \cdot B}.$$

b)

Snaga izvora jednosmernog napona je, u skladu sa usvojenim referentnim smerovima:

$$P_i = -U_0 \cdot I = -U_0 \cdot \frac{L \cdot v \cdot B - U_0}{R} = -\left(L \cdot v \cdot B - \frac{F_{meh} \cdot R}{L \cdot B} \right) \cdot \frac{F_{meh}}{L \cdot B}.$$

Gubici u električnom podsistemu su posledica nenulte vrednosti unutrašnjeg otpora generatora:

$$P_{\gamma e} = R \cdot I^2 = R \cdot \left(\frac{F_{meh}}{L \cdot B} \right)^2.$$

Snaga elektromehaničkog pretvaranja se može izračunati kao razlika uložene snage i snage gubitaka:

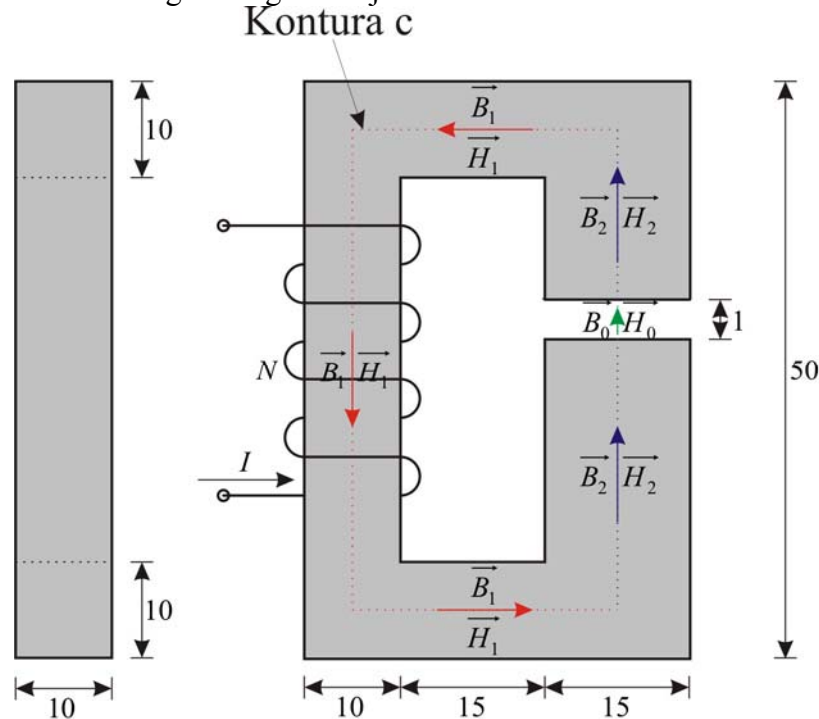
$$P_{em} = P_i - P_{\gamma e} = -v \cdot F_{meh}.$$

Negativan predznak nam govori da ovaj elektromehanički pretvarač pretvara mehaničku energiju u električnu energiju, tj. radi kao generator.

3. zadatak– rešenje

a)

Ukupna magnetska otpornost predstavlja zbir magnetskih otpornosti vazdušnog procepa, užeg i šireg dela feromagnetskog materijala:



$$R_{\mu} = R_{\mu,0} + R_{\mu,1} + R_{\mu,2} = \frac{1}{\mu_0} \cdot \frac{l_0}{S_0} + \frac{1}{\mu_0 \cdot \mu_r} \cdot \frac{l_1}{S_1} + \frac{1}{\mu_0 \cdot \mu_r} \cdot \frac{l_2}{S_2}.$$

Kako je za date dimenzije magnetskog kola:

- dužina srednje linije užeg dela feromagnetskog materijala gde postoji magnetsko polje \vec{H}_1 , $l_1=9.5$ cm,
- dužina srednje linije šireg dela feromagnetskog materijala gde postoji magnetsko polje \vec{H}_2 , $l_2=3.9$ cm,
- dužina vazdušnog zazora gde postoji magnetsko polje \vec{H}_0 , $l_0=1$ mm,
- površina poprečnog preseka užeg feromagnetskog materijala: $S_1=1$ cm x 1cm = 1cm²,
- površina poprečnog preseka šireg feromagnetskog materijala: $S_2= 1.5$ cm x 1 cm = 1.5 cm²,
- površina poprečnog preseka vazdušnog procepa: $S_0= 1.5$ cm x 1cm = 1,5 cm²,

ukupna magnetska otpornost magnetskog kola je: $R_{\mu} = 6.27 \cdot 10^6 \frac{A}{Wb}$.

Napomena: U proračunu magnetske otpornosti, zanemaruju se ivični efekti, tj. smatra se da je polje homogeno, te da se efekti promene pravca linija polja u uglovima magnetskog kola mogu zanemariti. Jedan od načina je da se za svaki deo magnetskog kola uvaži njegova aktuelna dužina, te da se polje u svakom delu smatra homogenim. Jedan od pristupa je definisanje srednje linije, kako je dato u pisanom

rešenju. U slučaju da se ovakav zadatak pojavi na ispitu ili kolokvijumu, biće praćen nedvosmislenim i jasnim uputstvom o tome kakvu apriksimaciju treba načiniti.

b)

Primenom graničnih teorema i Amperovog zakona rešavamo magnetsko kolo:

$$\int_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_{S \text{ na } C} \vec{J} \cdot d\vec{S} = \sum_{\text{kroz } S} I.$$

Odavde se dobija:

$$H_0 \cdot l_0 + H_1 \cdot l_1 + H_2 \cdot l_2 = N \cdot I.$$

Ako usvojimo pretpostavku da na razdvojnoj površi feromagnetika i vazduha nema tangencijalne komponente polja, to se može pisati da je:

$$B_0 = B_2 = \mu_0 \cdot H_0,$$

dok je:

$$H_2 = \frac{B_2}{\mu_0 \cdot \mu_r} = \frac{H_0}{\mu_r}.$$

Primenom zakona o konzervaciji magnetskog fluksa, ima se:

$$B_2 \cdot S_2 = B_1 \cdot S_1 \Rightarrow B_1 = \frac{B_2 \cdot S_2}{S_1} = \frac{\mu_0 \cdot H_0 \cdot S_2}{S_1},$$

odakle se sada dobija:

$$H_1 = \frac{B_1}{\mu_0 \cdot \mu_r} = \frac{H_0}{\mu_r} \cdot \frac{S_2}{S_1}.$$

Zamenom izraza za jačine magnetskih polja H_2 i H_1 u izraz za Amperov zakon dobija se vrednost magnetskog polja u zazoru:

$$H_0 = \frac{N \cdot I}{l_0 + \frac{l_1}{\mu_r} \cdot \frac{S_2}{S_1} + \frac{l_2}{\mu_r}}.$$

Stoga je jačina polja u vazдушnom zazoru

$$H_0 = 253.9 \frac{kA}{m}.$$

Dalje se izračunavaju tražene vrednosti:

$$B_0 = B_2 = \mu_0 \cdot H_0 = 0.32T,$$

$$B_1 = B_2 \cdot \frac{S_2}{S_1} = 0.48T,$$

$$H_2 = \frac{H_0}{\mu_r} = 253.9 \frac{A}{m}$$

$$H_1 = \frac{H_0}{\mu_r} \cdot \frac{S_2}{S_1} = 380.85 \frac{A}{m}.$$

c)

Prema zakonu o konzervaciji fluksa, on je po svakom poprečnom preseku jezgra isti i može se, recimo, izračunati, kao:

$$\Phi = B_1 \cdot S_1 = 0.48 \cdot 10^{-4} \text{Wb}.$$

Kako toliki fluks poseduje svaki od navojaka (zanemarena su sva rasipanja fluksa), ukupni fluks celog namotaja iznosi:

$$\Psi = N \cdot \Phi = 14.4 \text{mWb}.$$

d)

Koristeći pretpostavku o linearnosti feromagnetskog materijala, gustina magnetske energije u vazдушnom zazoru, užem i širem delu feromagnetskog materijala se može pisati kao:

$$w_{m,0} = \frac{B_0^2}{2 \cdot \mu_0}, \quad w_{m,1} = \frac{B_1^2}{2 \cdot \mu_0 \cdot \mu_r}, \quad w_{m,2} = \frac{B_2^2}{2 \cdot \mu_0 \cdot \mu_r}.$$

Stoga se je vrednost magnetske energije akumulisane u zazoru:

$$W_{m,0} = \int_{V_0} w_{m,0} dV_0 = w_{m,0} \cdot V_0 = \frac{B_0^2}{2 \cdot \mu_0} \cdot S_0 \cdot l_0 = 6.1 \text{mJ}.$$

Homogenost feromagnetskog materijala nam omogućuje i da izračunamo vrednost magnetske energije akumulisane u njemu:

$$W_{m,fe} = \int_{V_1} w_{m,1} dV_1 + \int_{V_2} w_{m,2} dV_2 = w_{m,1} \cdot V_1 + w_{m,2} \cdot V_2 = \frac{B_1^2}{2 \cdot \mu_r \cdot \mu_0} \cdot S_1 \cdot l_1 + \frac{B_2^2}{2 \cdot \mu_r \cdot \mu_0} \cdot S_2 \cdot l_2 = 1.1 \text{mJ}$$

Napomena:

Račun se može skratiti. Najpre se odredi ukupna energija magnetskog polja kao $W = \frac{1}{2} \Psi i$ Potom se izračuna energija magnetkog polja u vazдушnom zazoru prema izrazu $W_{m0} = S_0 l_0 B_0^2 / 2 / \mu_0$. Energija magnetskog polja u feromagnetskom materijalu je razlika između prethodna dva rezultata.

Jedan od načina je da se za svaki deo magnetkog kola uvaži njegova aktuelna dužina, te da se polje u svakom delu smatra homogenim. Numerički rezultati će se neznatno razlikovati (ovde nisu priloženi).

4. zadatak– rešenje

a) Polazeći od izraza za trenutnu vrednost elektromagnetskog momenta:

$$m(t) = + \frac{dW_m}{d\theta_m} = \frac{1}{2} \cdot i^2(t) \cdot \frac{dL_S(\theta_m)}{d\theta_m}$$

i uočavajući da je zavisnost sopstvene induktivnosti od ugla θ_m prikazanog na slici

$$L_S(\theta_m) = \frac{L_{\max} + L_{\min}}{2} + \frac{L_{\max} - L_{\min}}{2} \cdot \cos(2 \cdot \theta_m), \text{ dobija se izraz za trenutnu vrednost}$$

momenta:

$$m(t) = -\frac{1}{4} \cdot I_m^2 \cdot (L_{\max} - L_{\min}) \cdot \sin(2 \cdot (\Omega_m \cdot t - \delta)) - \frac{1}{8} \cdot I_m^2 \cdot (L_{\max} - L_{\min}) \cdot \sin(2 \cdot ((\Omega_m + \omega_i) \cdot t - \delta)) \\ - \frac{1}{8} \cdot I_m^2 \cdot (L_{\max} - L_{\min}) \cdot \sin(2 \cdot ((\Omega_m - \omega_i) \cdot t - \delta)) [Nm].$$

Kako je $\omega_i, \Omega_m \geq 0$, zaključuje se da se nenulta vrednost srednjeg momenta može postići samo u slučaju kada je ispunjen uslov:

$$\omega_i = \Omega_m.$$

b) Srednja vrednost momenta u slučaju ispunjenja uslova opisanog u prethodnoj tački potiče samo od poslednjeg člana u izrazu za trenutnu vrednost momenta i iznosi:

$$M_{sr} = \frac{1}{T} \int_0^T m(t) dt = \frac{1}{8} \cdot I_m^2 \cdot (L_{\max} - L_{\min}) \cdot \sin(2 \cdot \delta) [Nm].$$

c) U cilju izračunavanja napona na priključcima statora, potrebno je najpre izračunati fluks koji se ima u statorskom namotaju ($\omega_i = \Omega_m$):

$$\Psi_S(t) = L_S(t) \cdot i(t) = \left(\frac{L_{\max} + L_{\min}}{2} + \frac{L_{\max} - L_{\min}}{2} \cdot \cos(2 \cdot (\omega_i \cdot t - \delta)) \right) \cdot I_m \cdot \cos(\omega_i \cdot t) = \\ I_m \cdot \frac{L_{\max} + L_{\min}}{2} \cdot \cos(\omega_i \cdot t) + I_m \cdot \frac{L_{\max} - L_{\min}}{4} \cdot \cos(3 \cdot \omega_i \cdot t - 2 \cdot \delta) + I_m \cdot \frac{L_{\max} - L_{\min}}{4} \cdot \cos(\omega_i \cdot t - 2 \cdot \delta) [Wb].$$

Napon na krajevima statorskog namotaja je:

$$u(t) = R_S \cdot i(t) + \frac{d\Psi_S}{dt} = R_S \cdot I_m \cdot \cos(\omega_i \cdot t) - I_m \cdot \frac{L_{\max} + L_{\min}}{2} \cdot \omega_i \cdot \sin(\omega_i \cdot t) \\ - 3 \cdot \omega_i \cdot I_m \cdot \frac{L_{\max} - L_{\min}}{4} \cdot \sin(3 \cdot \omega_i \cdot t - 2 \cdot \delta) - \omega_i \cdot I_m \cdot \frac{L_{\max} - L_{\min}}{4} \cdot \sin(\omega_i \cdot t - 2 \cdot \delta) [V].$$

d) Srednja snaga elektromehaničkog pretvaranja predstavlja proizvod elektromagnetskog momenta i ugaone brzine rotora:

$$P_{em} = M_{sr} \cdot \Omega_m = \frac{1}{8} \cdot I_m^2 \cdot (L_{\max} - L_{\min}) \cdot \Omega_m \cdot \sin(2 \cdot \delta) [W].$$

Srednja snaga kontrolisanog izvora predstavlja zbir srednje snage elektromehaničkog pretvaranja i srednje snage gubitaka u namotaju statora:

$$P_{i,sr} = \frac{1}{8} \cdot I_m^2 \cdot (L_{\max} - L_{\min}) \cdot \Omega_m \cdot \sin(2 \cdot \delta) + R_S \cdot \frac{1}{T} \cdot \int_0^T i^2(t) dt \\ P_{i,sr} = \frac{1}{8} \cdot I_m^2 \cdot (L_{\max} - L_{\min}) \cdot \Omega_m \cdot \sin(2 \cdot \delta) + R_S \cdot \frac{I_m^2}{2} [W].$$

Od interesa za bolje razumevanje električnih mašina je iskoristiti dobijene rezultate i uočiti da kontraelektromotorna sila ima komponentu proporcionalnu izvodu struje, koja se često zove *transformatorska ems*, kao i komponentu koja je proporcionalna proizvodu $\omega dL/d\theta$, koju zovemo *dinamička ems*.

$$e = \frac{d\psi}{dt} = \frac{d(L \cdot i)}{dt} = L \cdot \frac{di}{dt} + i \cdot \frac{dL}{dt} = L \cdot \frac{di}{dt} + i \cdot \omega \cdot \frac{dL}{d\theta}$$

U poslednjem delu zadatka, pod (d), traži se određivanje srednje snage. U zavisnosti od pristupa, može se javiti sabirak koji predstavlja izvod energije magnetskog polja, koji predstavlja snagu koja se ulaže u polje. Poznato je da srednja vrednost snage koja se ulaže u magnetsko polje mora biti jednaka nuli (u protivnom bi energija magnetskog polja neprekidno rasla ili opadala, što se ne može održati). Tvrdnja se može verifikovati sledećom jednačinom:

$$\frac{d(W_m)}{dt} = \frac{d\left(\frac{1}{2}L \cdot i^2\right)}{dt} = -\frac{1}{2}\omega I_m^2 \left[\frac{L_{\max} - L_{\min}}{2} \sin(4\omega t - 2\delta) + \frac{L_{\max} - L_{\min}}{2} \sin(2\omega t - 2\delta) + \frac{L_{\max} + L_{\min}}{2} \sin(2\omega t) \right]$$

(smatra se da je $\omega = \omega_m = \omega_i$, kao i da se struja i induktivnost menjaju prema jednačinama datim u zadatku) Uočiti da je srednja vrednost gore datog izraza jednaka nuli.

5. zadatak – rešenje

a)

Energija akumulisana u magnetskom polju (polju koje predstavlja sprežni medijum u procesu elektromehaničkog pretvaranja) u ovom zadatku iznosi:

$$W_m(t, \theta_m) = \frac{1}{2}L_1 \cdot i_1^2(t) + \frac{1}{2}L_2 \cdot i_2^2(t) + L_{12}(\theta_m(t)) \cdot i_1(t) \cdot i_2(t).$$

Budući da je struja funkcija vremena pa tako nije direktno zavisna od položaja rotora, izvod energije polja po ugaoenom pomeraju (videti predavanja) jednak je:

$$m(t) = \frac{dW_m(t, \theta_m)}{d\theta_m} = i_1(t) \cdot i_2(t) \cdot \frac{dL_{12}(\theta_m(t))}{d\theta_m} = [2 \cdot \cos(50 \cdot \pi \cdot t) \cdot \cos(\theta_m(t))] [Nm].$$

U skladu sa tekstom zadatka, ugao $\theta_m(t)$ se može zapisati kao:

$$\theta_m(t) = \Omega_m \cdot t + \theta_m(0) = 50 \cdot \pi \cdot t + \frac{\pi}{3},$$

odakle se izračunava trenutna vrednost momenta prema izrazu:

$$m(t) = 2 \cdot \cos(50 \cdot \pi \cdot t) \cdot \cos\left(50 \cdot \pi \cdot t + \frac{\pi}{3}\right) = \left\{ \frac{1}{2} + \cos\left(100 \cdot \pi \cdot t + \frac{\pi}{3}\right) \right\} [Nm].$$

b)

Srednja vrednost momenta se izračunava usrednjavanjem trenutne vrednosti momenta tokom jednog obrtaja rotora, to jest tokom $T = 40$ ms:

$$M_{em} = \frac{1}{T} \int_0^T m(t) dt = 0.5 Nm.$$

Srednja snaga elektromehaničkog pretvaranja predstavlja proizvod elektromagnetskog momenta i ugaone brzine rotora:

$$P_{em} = M_{em} \cdot \Omega_m = 25 \cdot \pi \text{ W}.$$

c)

Radi izračunavanja napona na krajevima statorskog namotaja, potrebno je najpre izračunati fluks koji postoji u statorskom namotaju:

$$\Psi_1(t) = L_1 \cdot i_1(t) + L_{12}(\theta_m(t)) \cdot i_2 = \left[0.4 \cdot \cos(50 \cdot \pi \cdot t) + 0.5 \cdot \sin\left(50 \cdot \pi \cdot t + \frac{\pi}{3}\right) \right] [\text{Wb}].$$

Napon na statorskim priključcima je:

$$u_1(t) = R_1 \cdot i_1(t) + \frac{d\Psi_1(t)}{dt} = \left[4 \cdot \cos(50 \cdot \pi \cdot t) - 20 \cdot \pi \cdot \sin(50 \cdot \pi \cdot t) + 25 \cdot \pi \cdot \cos\left(50 \cdot \pi \cdot t + \frac{\pi}{3}\right) \right] [V].$$

d)

Trenutna snaga koja se uzima iz izvora na koji je priključen statorski namotaj jednaka je

$$\begin{aligned} p_1(t) &= u_1(t) \cdot i_1(t) = \left(4 \cdot \cos(50 \cdot \pi \cdot t) - 20 \cdot \pi \cdot \sin(50 \cdot \pi \cdot t) + 25 \cdot \pi \cdot \cos\left(50 \cdot \pi \cdot t + \frac{\pi}{3}\right) \right) \cdot 4 \cos(50 \cdot \pi \cdot t) = \\ &= \left[8 + 8 \cdot \cos(100 \cdot \pi \cdot t) - 40 \cdot \pi \cdot \sin(100 \cdot \pi \cdot t) + 50 \cdot \pi \cdot \cos\left(100 \cdot \pi \cdot t + \frac{\pi}{3}\right) + 25 \cdot \pi \right] [W]. \end{aligned}$$

Stoga, srednja vrednost ulazne snage iznosi:

$$P_{i,sr} = \frac{1}{T} \int_0^T p_1(t) dt$$

$$P_{i,sr} = (25 \cdot \pi + 8) \text{ W} = 86.54 \text{ W},$$

i predstavlja zbir srednje snage elektromehaničkog pretvaranja i snage Džulovih gubitaka na otpornosti statorskog namotaja.

6. zadatak – rešenje

a)

Elektromotorna sila indukovana u provodniku \odot na slici 2 jednaka je $E_1 = LvB$, gde je v periferna brzina rotora, L dužina provodnika (tj. osna dužina mašine) dok je B indukcija koja u datom trenutku postoji u tački $\theta = \pi/2$. Jačina indukcije se menja u vremenu usled obrtanja rotora. Rotor se obrće brzinom Ω_m , tako da je $\theta_m = \Omega_m t$. Posmatrajući sliku 2 i uočavajući da u zoni severnog (N) pola stalnog magneta postoji indukcija $+B_{max}$, zaključuje se da je indukcija $B(\theta = \pi/2)$ jednaka $+B_{max}$ u vremenskom intervalu $t \in [0, \pi/\Omega_m]$. U trenutku $t = \pi/\Omega_m$, u položaju $\theta = \pi/2$, severni magnetski pol rotora izmiče i ustupa mesto južnom, tako da vrednost magnetske indukcije menja znak. Gore rečeno se može i matematički iskazati. Jačina magnetske indukcije na periferiji rotora je funkcija koordinate posmatrane tačke θ , kao i trenutnog položaja rotora θ_m , tako da promenu magnetske indukcije treba predstaviti izrazom $B(\theta, \theta_m)$.

Trenutna vrednost indukovane elektromotorne sile u statorskom namotaju sa jednim navojkom (dva provodnika) je funkcija trenutnog položaja rotora θ_m :

$$e(t) = 2 \cdot B(\theta = \pi / 2, \theta_m) \cdot L \cdot v = 2 \cdot B(\theta = \pi / 2, \theta_m) \cdot L \cdot \Omega_m \cdot \frac{D}{2}$$

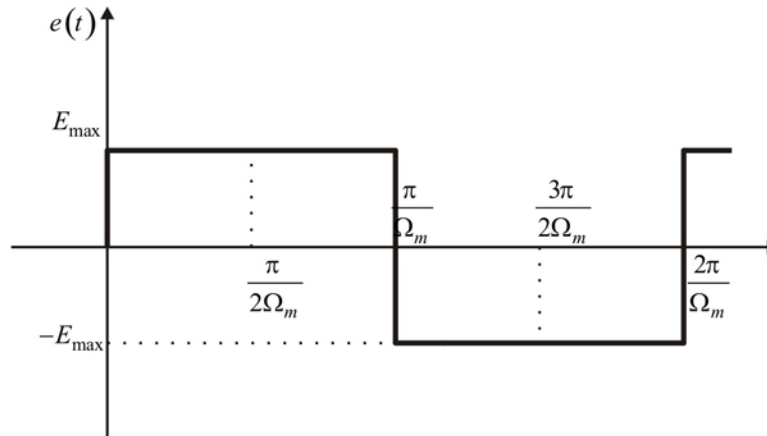
$$= L \cdot D \cdot \Omega_m \cdot B(\theta = \pi / 2, \theta_m) = K \cdot B(\theta = \pi / 2, \theta_m)$$

gde je $K = L \cdot D \cdot \Omega_m$ konstantna vrednost.

Dakle, promena indukovane elektromotorne sile je identična promeni magnetske indukcije na položaju $\theta = \pi/2$, tj. Na krajevima namotaja postoji pravougaona povorka naponskih impulsa. Srednja vrednost e.m.s. jednaka je nuli, dok je njena kružna učestanost jednaka brzini obrtanja rotora (tj. period e.m.s. jednak je $2\pi/\Omega_m$). Amplituda indukovane e.m.s. jednaka je:

$$E_{\max} = L \cdot D \cdot \Omega_m \cdot B_{\max}$$

Tražena promena je prikazana na slici 4.



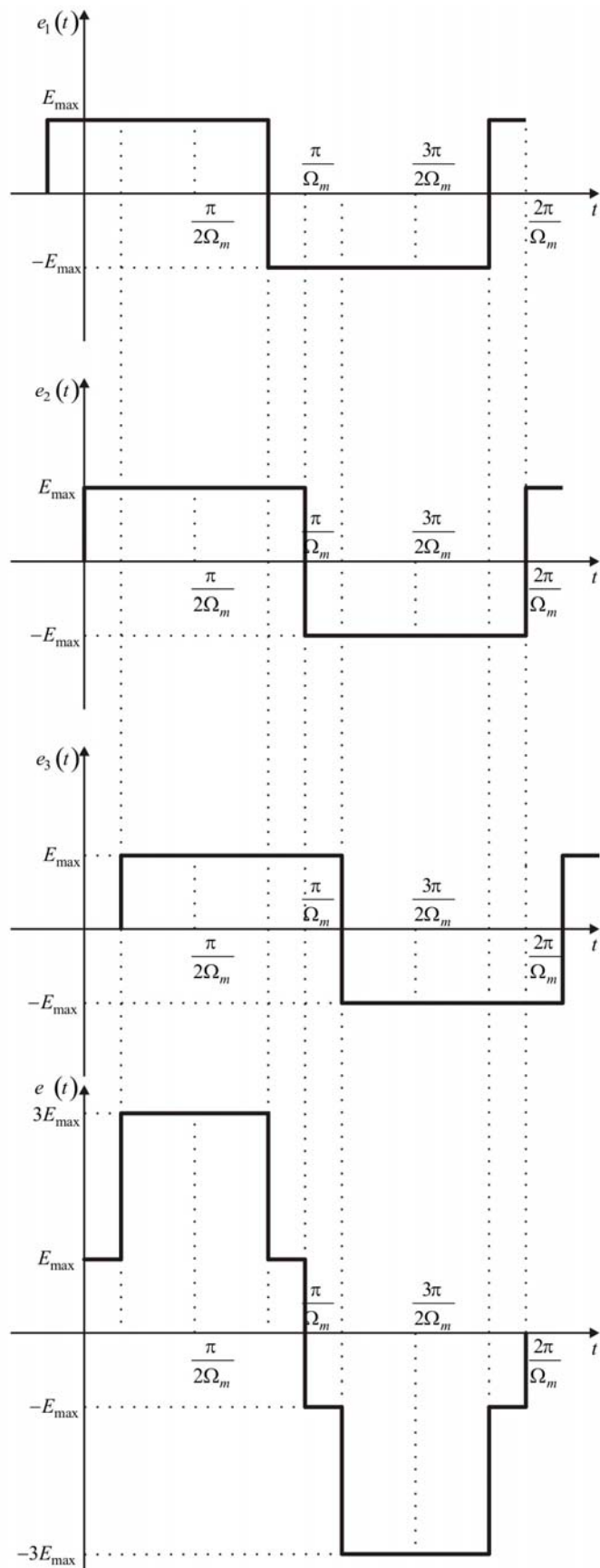
Slika 4

b)

Zbog redne veze navojaka, elektromotorna sila indukovana u statorskom namotaju je u svakom trenutku jednaka zbiru elektromotornih sila svakog pojedinačnog navojka:

$$e(t) = e_1(t) + e_2(t) + e_3(t).$$

Elektromotorne sile, indukovane u svakom navojku imaju isti oblik promene (pravougaoni naponski impulsi), ali sa razlikom da su oni pomereni za $\pi/6$, odnosno za $\Delta = \pi/6/\Omega_m$. **Priroda i odnos prostornog pomeraja provodnika, i vremenskog kašnjenja u obliku e.m.s. biće detaljnije objašnjena:**



Slika 5

Potrebno je uočiti da se promena polariteta indukovane e.m.s. u jednom navojku događa u trenutku kada u blizini njegovih provodnika dolazi do promene polariteta magnetskog polja. Kada se rotor obrće u smeru suprotnom od kazaljke na časovniku, promena e.m.s. se najpre dogodi u konturi 1 (slika 3), potom u konturi 2 i na kraju u konturi 3. Interval koji deli opisane događaje je $\Delta t = \pi/6/\Omega_m$. Dakle, prostorni pomeraj provodnika za posledicu ima vremensko (tj. fazno) kašnjenje u indukovanim e.m.s.

Dakle, elektromotorna sila u zavojku 1-1', $e_1(t)$, prednjači za $\pi/6$, dok elektromotorna sila, $e_3(t)$ u zavojku 3-3', fazno kasni za $\pi/6$. Postupak grafičkog zbrajanja elektromotornih sila je prikazan na slici 5. Kao što se sa slike može videti, srednja vrednost indukovane elektromotorne sile jednaka je nuli, dok je njena maksimalna vrednost jednaka:

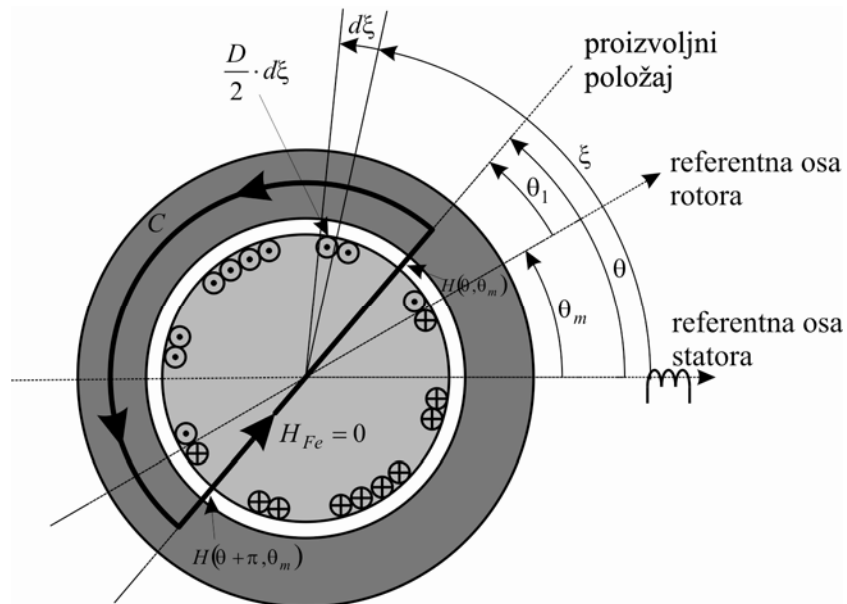
$$E_{\max} = 3 \cdot L \cdot D \cdot \Omega_m \cdot B_{\max}$$

7. zadatak – rešenje

a)

1. Korak:

Određivanje prostorne raspodele jačine magnetnog polja u zazoru, $H(\theta, \theta_m)$, koja potiče od struje rotorskog namotaja I_r u funkciji ugaonog pomeraja rotora u odnosu na stator, θ_m .



Struja koja postoji u rotorskim provodnicima stvara magnetsko polje u vazдушnom zazoru mašine. Radijalna komponenta polja je značajno veća od tangencijalne, koja se može zanemariti. Zatvorena kontura C, prikazana na slici, dva puta prolazi kroz vazдушni zazor širine δ , na ugaonom položaju θ i $\theta + \pi$. Budući da je polje radijalno a zazor relativno mali, jačina polja u datom ugaonom položaju se može smatrati nezavisnom i konstantnom duž odsečka δ konture C (odsečka konture koji se nalazi u zazoru). Dakle,

za određivanje krivolinijskog integrala jačine magnetskog polja po zatvorenoj konturi C, dovoljno je poznavati zazor i jačinu polja u položajima θ i $\theta + \pi$.

Obrazloženje: Pošto je $H_{Fe} \approx 0$, smatra se da magnetsko polje postoji isključivo u vazdušnom zazoru. Ugao θ_1 jednak je razlici između koordinate θ i ugla θ_m , koji označava pomeraj rotora u odnosu na stator. U položajima θ i $\theta + \pi$, polje H ima istu amplitudu ali suprotan znak. U jednom položaju smer polja je od rotora prema statoru dok je na drugom mestu suprotan. Posmatrano u odnosu na referentni, radijalni smer cilindričnog koordinatnog sistema (koji je u svim položajima usmeren od rotora prema stator), $H(\theta + \pi, \theta_m) = -H(\theta, \theta_m)$. Ovakav zaključak je posledica činjenice da je mašina simetrična, kao i činjenice da polje vektora magnetske indukcije nije izvorno $\text{div} \vec{B} = 0$, što važi i za polje vektora jačine magnetskog polja H , pod uslovom da je veza B i H linearna.

Jačina magnetskog polja u vazdušnom zazoru, $H(\theta, \theta_m)$, se određuje primenom Amperovog zakona na konturu C.

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = I_C .$$

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = H(\theta, \theta_m) \cdot \delta - H(\theta + \pi, \theta_m) \cdot \delta = H(\theta, \theta_m) \cdot \delta + H(\theta, \theta_m) \cdot \delta = 2 \cdot \delta \cdot H(\theta, \theta_m) . \quad \text{ž}$$

Krivolinijski integral vektora magnetskog polja po zatvorenoj konturi C jednak je zbiru svih struja koje prolaze kroz površ oslonjenu na konturu, I_C .

$$I_C = \int_{\theta}^{\theta + \pi} N'_r(\xi - \theta_m) \cdot I_r \cdot \frac{D}{2} d\xi$$

$$I_C = I_r \cdot \frac{D}{2} \cdot \int_{\theta}^{\theta + \pi} N'_{r,\max} \cdot \sin(\xi - \theta_m) d\xi = D \cdot I_r \cdot N'_{r,\max} \cdot \cos(\theta - \theta_m) .$$

U prethodnom izrazu ξ predstavlja proizvoljni ugaoni položaj u intervalu integracije.

$$H(\theta, \theta_m) = \frac{D \cdot I_r \cdot N'_{r,\max} \cdot \cos(\theta - \theta_m)}{2 \cdot \delta} .$$

2. Korak:

Određivanje magnetske indukcije u zazoru kao funkcije ugaonog pomeraja rotora u odnosu na stator, θ_m , rotorske struje i parametara mašine.

$$B(\theta, \theta_m) = \mu_0 \cdot H(\theta, \theta_m) = \mu_0 \cdot \frac{D \cdot I_r \cdot N'_{r,\max} \cdot \cos(\theta - \theta_m)}{2 \cdot \delta} .$$

3. Korak:

Energija magnetskog polja je dominantno skoncentrisana u zazoru i njena gustina se može opisati izrazom :

$$w_m = 0.5 \cdot \mu_0 \cdot H^2(\theta, \theta_m)$$

Na osnovu ovoga, energija magnetskog polja se može izračunati kao integral gustine magnetske po zapremini zazora :

$$W_m = \int_V w_m dV = \int_0^{2\pi} 0.5 \cdot \mu_0 \cdot H^2(\theta, \theta_m) \cdot L \cdot \frac{D}{2} \delta \cdot d\theta = \frac{\mu_0 \cdot \pi \cdot D^3 \cdot L \cdot I_r^2}{16 \cdot \delta} \cdot N_{r,\max}'^2$$

4. Korak:

Maksimalna srednja vrednost momenta se može proceniti na osnovu energije akumulisane u magnetskom polju kao :

$$M_{sr,\max} = \frac{W_m}{2 \cdot \pi} = \frac{\mu_0 \cdot D^3 \cdot L \cdot I_r^2}{32 \cdot \delta} \cdot N_{r,\max}'^2$$

b)

1. Korak:

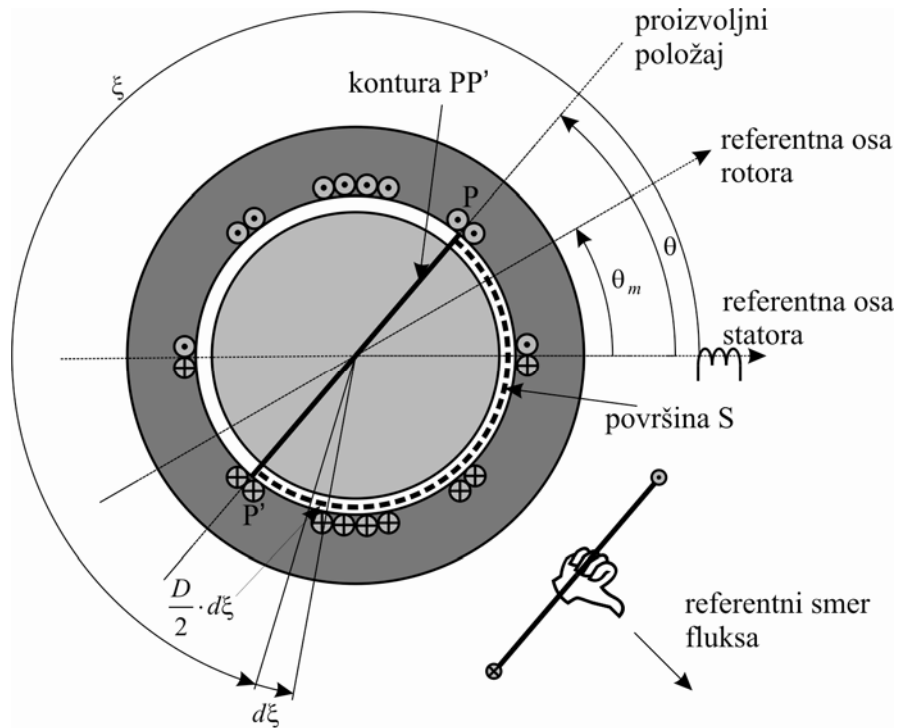
Magnetna indukcija u zazoru potiče od rotorske struje i funkcija je ugaonog pomeraja rotora u odnosu na stator, θ_m :

$$B(\theta, \theta_m) = \mu_0 \cdot \frac{D \cdot I_r \cdot N_{r,\max}' \cdot \cos(\theta - \theta_m)}{2 \cdot \delta}$$

2. Korak:

Određivanje fluksa kroz konturu koja se oslanja na provodnike statorskog namotaja P i P'.

Na unutrašnjoj strani statora nalazi se sinusoidalno raspodeljen namotaj statora. Na slici sa P i P' je označen par provodnika na ugaonom rastojanju π koji čini konturu (navojak). Položaj konture u ortogonalnom preseku je određen osom koja sa osom namotaja statora zaklapa ugao θ .



Fluks kroz posmatranu konturu se dobija izračunavanjem površinskog integrala magnetske indukcije na površi S : $\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$. Pošto je poznat analitički izraz za jačinu

magnetske indukcije u vazдушnom zazoru, najpogodnije je za površ integracije usvojiti polucilindrar poluprečnika $D/2$ i dužine L koji se prostire duž vazdušnog zazora (videti isprekidanu liniju na gornjem crtežu) i oslonjen je na konturu, od ugaonog položaja $\theta - \pi$ do ugaonog položaja θ .

$$\Phi(\theta, \theta_m) = \int_{\theta - \pi}^{\theta} B(\xi, \theta_m) L \cdot \frac{D}{2} d\xi = \frac{\mu_0 \cdot L \cdot D^2 \cdot I_r}{2\delta} \cdot N'_{r, \max} \cdot \sin(\theta - \theta_m).$$

3. Korak:

Određivanje ukupnog fluksa statorskog namotaja koji potiče od polja koje postoji u zazoru.

Ugaonom pomeraju $d\theta$ odgovara dužinski pomeraj po obimu zazora od $D/2 \cdot d\theta$. Na tom pomeraju nalazi se $dN_s = N'_s(\theta) \cdot D/2 \cdot d\theta$ provodnika pri čemu je $N'_s(\theta)$ podužna gustina statorskih provodnika. Kroz navojke koji čine ti provodnici javlja se fluks čija je vrednost: $d\Psi_s(\theta_m) = \Phi(\theta, \theta_m) \cdot dN_s$. Ukupan fluks se računa kao integral elementarnog dela fluksa na intervalu untegracije $0 - \pi$ (uočiti da interval integracije nije ceo obim statora jer bi na taj način pogrešno obuhvatali sve provodnike po dva puta). Ako sa $\Psi_s(\theta_m)$ označimo ukupan fluks koji se indukuje u namotaju statora, a potiče od polja koje postoji u zazoru, ima se:

$$\Psi_s(\theta_m) = \int_0^\pi \Phi(\theta, \theta_m) \cdot N'_s(\theta) \cdot \frac{D}{2} d\theta = \frac{\pi \cdot \mu_0 \cdot L \cdot D^3 \cdot I_r \cdot N'_{s,\max} \cdot N'_{r,\max}}{8 \cdot \delta} \cdot \cos(\theta_m).$$

4. Korak:

Određivanje elektromotorne sile koja se indukuje u statorskom namotaju.

Elektromotorna sila koja se indukuje u statorskom namotaju, iznosi:

$$e(\theta_m, \Omega_m) = \frac{d\Psi_s(\theta_m)}{dt} = \frac{d\Psi_s(\theta_m)}{d\theta_m} \cdot \frac{d\theta_m}{dt} \Rightarrow e(\theta_m, \Omega_m) = -\frac{\pi \cdot \mu_0 \cdot L \cdot D^3 \cdot I_r \cdot N'_{s,\max} \cdot N'_{r,\max}}{8 \cdot \delta} \cdot \Omega_m \cdot \sin(\theta_m).$$

8. zadatak – rešenje

1. Korak:

Određivanje prostorne raspodele jačine magnetne indukcije u zazoru, $B(\theta, \theta_m)$ koja potiče od permanentnog magneta na rotoru, u funkciji ugaonog pomeraja rotora u odnosu na stator, θ_m .

Razvojem date funkcije u Furijeov red dobija se:

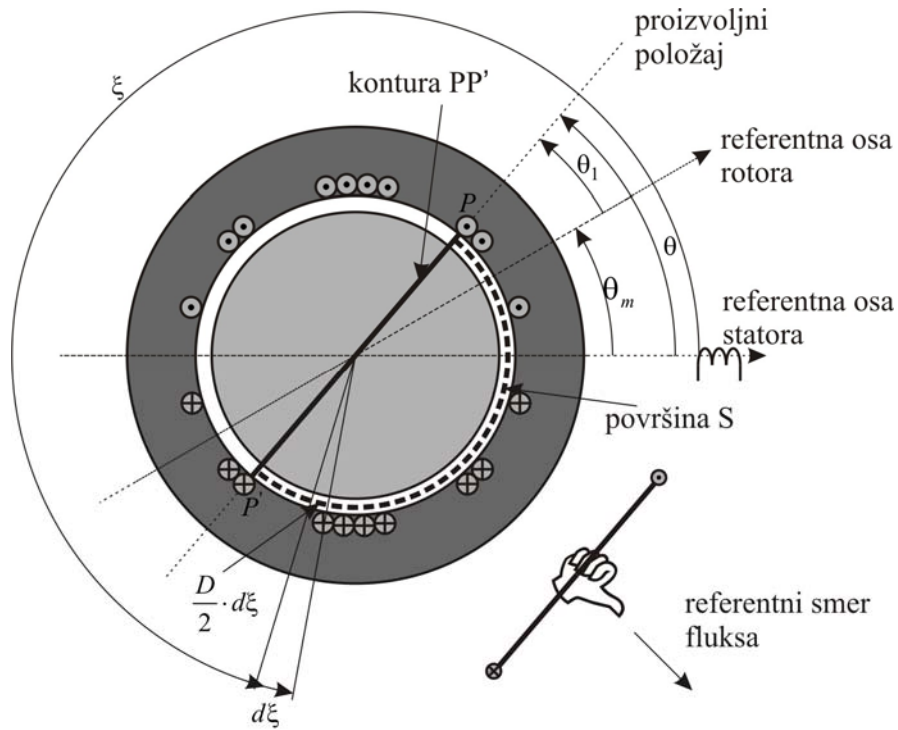
$$B(\theta, \theta_m) = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{4}{\pi} \cdot \frac{(-1)^{i+1} \cdot B_{\max}}{2 \cdot i - 1} \cdot \cos((2 \cdot i - 1) \cdot (\theta - \theta_m)).$$

Dakle, zbog parnosti funkcije, ovaj red ima samo *cos* članove, a zbog strukture periodičnih impulsa, svi parni članovi su jednaki nuli. Kako se na unutrašnjoj strani statora nalazi sinusoidalno raspodeljen namotaj statora, u njemu se u zavisnosti od ovog polja indukuje *ems* koju treba odrediti.

2. Korak:

Određivanje fluksa kroz konturu koja se oslanja na provodnike statorskog namotaja P i P'.

Na unutrašnjoj strani statora nalazi se sinusoidalno raspodeljen namotaj statora. Na slici sa P i P' je označen par provodnika na ugaonom rastojanju π koji čini konturu (navojak). Položaj konture u ortogonalnom preseku je određen osom koja sa osom namotaja statora zaklapa ugao θ .



Fluks kroz posmatranu konturu se dobija izračunavanjem površinskog integrala magnetske indukcije na površi S: $\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$. Pošto je poznat analitički izraz za jačinu

magnetske indukcije u vazдушnom zazoru, najpogodnije je za površ integracije usvojiti polucilindrar poluprečnika $D/2$ i dužine L koji se prostire duž vazdušnog zazora (videti isprekidanu liniju na gornjem crtežu) i oslonjen je na konturu, od ugaonog položaja $\theta - \pi$ do ugaonog položaja θ .

$$\begin{aligned} \Phi(\theta, \theta_m) &= \int_{\theta-\pi}^{\theta} B(\xi, \theta_m) \cdot L \cdot \frac{D}{2} d\xi = \int_{\theta-\pi}^{\theta} \left\{ \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{4}{\pi} \cdot \frac{(-1)^{i+1} \cdot B_{\max}}{2 \cdot i - 1} \cdot \cos((2 \cdot i - 1) \cdot (\xi - \theta_m)) \right\} \cdot L \cdot \frac{D}{2} d\xi = \\ &= L \cdot D \cdot \frac{4 \cdot B_{\max}}{\pi} \cdot \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{i+1} \cdot \sin((2 \cdot i - 1) \cdot (\theta - \theta_m))}{(2 \cdot i - 1)^2} \end{aligned}$$

3. Korak:

Određivanje ukupnog fluksa statorskog namotaja koji potiče od polja koje postoji u zazoru.

Ugaonom pomeraju $d\theta$ odgovara dužinski pomeraj po obimu zazora od $D/2 \cdot d\theta$. Na tom pomeraju nalazi se $dN_s = N'_s(\theta) \cdot D/2 \cdot d\theta$ provodnika pri čemu je $N'_s(\theta)$ podužna gustina statorskih provodnika. Kroz navojke koji čine ti provodnici javlja se fluks čija je vrednost: $d\Psi_s(\theta_m) = \Phi(\theta, \theta_m) \cdot dN_s$. Ukupan fluks se računa kao integral elementarnog

delu fluksa na intervalu integracije $0 - \pi$ (uočiti da interval integracije nije ceo obim statora jer bi na taj način pogrešno obuhvatali sve provodnike po dva puta). Ako sa $\Psi_s(\theta_m)$ označimo ukupan fluks koji se indukuje u namotaju statora, a potiče od polja koje postoji u zazoru, ima se:

$$\begin{aligned}\Psi_s(\theta_m) &= \int_0^\pi \Phi(\theta, \theta_m) \cdot N'_s(\theta) \cdot \frac{D}{2} d\theta = \int_0^\pi \left[L \cdot D \cdot \frac{4 \cdot B_{\max}}{\pi} \cdot \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{i+1} \cdot \sin((2 \cdot i - 1) \cdot (\theta - \theta_m))}{(2 \cdot i - 1)^2} \right] \cdot N'_{s, \max} \cdot \sin(\theta) \cdot \frac{D}{2} \\ &= L \cdot \frac{D^2}{2} \cdot \frac{4 \cdot B_{\max}}{\pi} \cdot N'_{s, \max} \cdot \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{(2 \cdot i - 1)^2} \cdot \int_0^\pi \sin((2i - 1) \cdot (\theta - \theta_m)) \cdot \sin(\theta) d\theta = \\ &= L \cdot \frac{D^2}{2} \cdot \frac{4 \cdot B_{\max}}{\pi} \cdot N'_{s, \max} \cdot \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{i+1}}{(2 \cdot i - 1)^2} \cdot \int_0^\pi \frac{\cos[(2 \cdot i - 2) \cdot \theta - (2 \cdot i - 1) \cdot \theta_m] - \cos[2 \cdot i \cdot \theta - (2 \cdot i - 1) \cdot \theta_m]}{2} d\theta.\end{aligned}$$

Nenulta vrednost podintegralne funkcije se ima samo za $i=1$, jer ostali članovi predstavljaju integrale periodične funkcije na intervalu koji je celobrojni umnožak periode funkcije. Stoga se dobija konačna vrednost fluksa statorskog namotaja:

$$\begin{aligned}\Psi_s(\theta_m) &= L \cdot \frac{D^2}{2} \cdot \frac{4 \cdot B_{\max}}{\pi} \cdot N'_{s, \max} \cdot \int_0^\pi \frac{\cos(\theta_m) - \cos(2\theta - \theta_m)}{2} d\theta \\ \Psi_s(\theta_m) &= L \cdot \frac{D^2}{4} \cdot \frac{4 \cdot B_{\max}}{\pi} \cdot N'_{s, \max} \cdot \int_0^\pi \cos(\theta_m) d\theta = L \cdot D^2 \cdot B_{\max} \cdot N'_{s, \max} \cdot \cos(\theta_m)\end{aligned}$$

4. Korak:

Određivanje elektromotorne sile koja se indukuje u statorskom namotaju.

Elektromotorna sila koja se indukuje u statorskom namotaju, iznosi:

$$e(\theta_m, \Omega_m) = \frac{d\Psi_s(\theta_m)}{dt} = \frac{d\Psi_s(\theta_m)}{d\theta_m} \cdot \frac{d\theta_m}{dt} \Rightarrow e = -L \cdot D^2 \cdot B_{\max} \cdot N'_{s, \max} \cdot \Omega_m \cdot \sin(\theta_m).$$

9. zadatak – rešenje

(a)

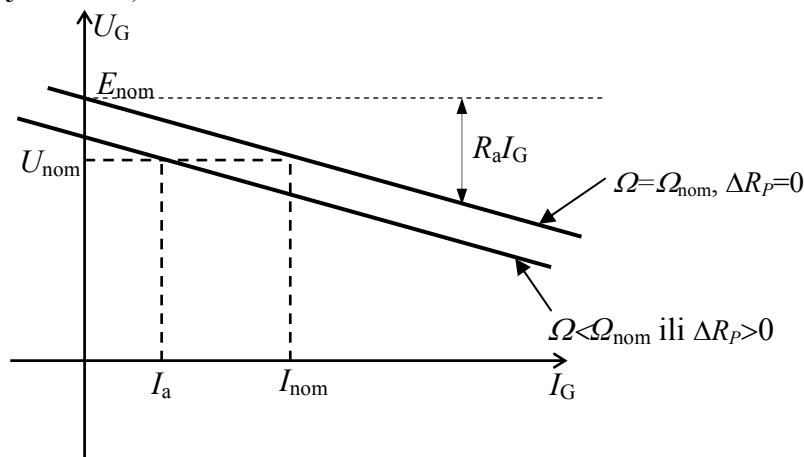
Struja generatora $I_G = -I_a$ je usmerena od četkice B ka četkici A indukta. Preko četkice A, dovodi se na opterećanje. Struja opterećenja I_G se dovodi povrtanim vodom natrag do četkice B. Napon generatora jednak je $U_G = U_{AB} = E_{nom} - R_a I_G = k_e \Phi_{nom} \Omega_{nom} - R_a I_G$. Potrebno je odrediti E_{nom} . Poznato je da nominalno pobuđeni generator pri nominalnoj brzini obrtanja i nominalnom opterećenju daje napon $U_G = U_{AB} = U_{nom}$ jednak nominalnom.

$$E_{nom} = U_{nom} + R_a I_{nom} = 220 + 50 \cdot 0.4 = 240 \text{ V.}$$

$$\text{Dakle, } U_G = U_{AB} = E_{nom} - R_a I_G = 240 - 20 \cdot 0.4 = 232 \text{ V.}$$

(b)

Napon na potrošaču dobijen u prethodnoj tački je veći od nominalnog. Ovo se događa zato što je struja opterećenja manja od nominalne, pa je manji i serijski pad napona, što dovodi do većeg izlaznog napona. (Diskusija: Da bi se napon $U_G = U_{AB} = E_{nom} - R_a I_G$ smanjio a struja zadržala neizmenjenom, serijska otpornost R_a mogla bi se uvećati dodavanjem otpornika $\Delta R_a = 12\text{V}/20\text{A} = 0.6 \Omega$. Ovo, međutim nije problem koji je dat u zadatku). Ugradnjom serijskog otpora ΔR_P smanjuje se pobudna struja. Kao posledica toga, umanjije se i indukovana elektromotorna sila, pa tako i napon na potrošaču. (Slika koja je data dole **nije obavezni deo rešenja** već je data da pomogne razumevanju jednačina)



Elektromotorna sila treba da bude umanjena sa inicijalne vrednosti $E_{nom} = 240\text{V}$ na novu vrednost E_1 , koja će dati $U_G + 220\text{V}$.

$$E_1 = 220 + 20 \cdot 0.4 = 228\text{V.}$$

Kako se brzina obrtanja ne menja, $E_{nom} = k_e \Phi_{nom} \Omega_{nom}$, dok je $E_1 = k_e \Phi_1 \Omega_{nom}$. Dakle, potrebno je umanjiti pobudni fluks na vrednost $\Phi_1 = \Phi_{nom} (E_1 / E_{nom}) = \Phi_{nom} \cdot 0.95$.

Pobudni fluks je proporcionalan struji pobude:

$$\Phi_p = \frac{L_p}{N} I_p = L'_p I_p,$$

odnosno, obrnuto proporcionalan ukupnom otporu u pobudnom kolu:

$$\Phi_p = (L_p N_p) U_p / (R_p + \Delta R_p)$$

Kako je $\Phi_{nom} = (L_p N_p) U_p / R_p$, a $\Phi_1 = (L_p N_p) U_p / (R_p + \Delta R_p)$ dobija se:

$$(R_p + \Delta R_p) / R_p = 1 + \Delta R_p / R_p = E_{nom} / E_1 = 1 / 0.95, \text{ tako da je } \Delta R_p = 0.6316 \Omega.$$

10. zadatak – rešenje

(Diskusija: Objašnjenje podataka navedenih u zadatku)

Motori pretvaraju električnu snagu u mehaničku. Termin *nominalna snaga motora* se odnosi na mehaničku snagu, tj. snagu koji motor daje na svom izlaznom vratilu.

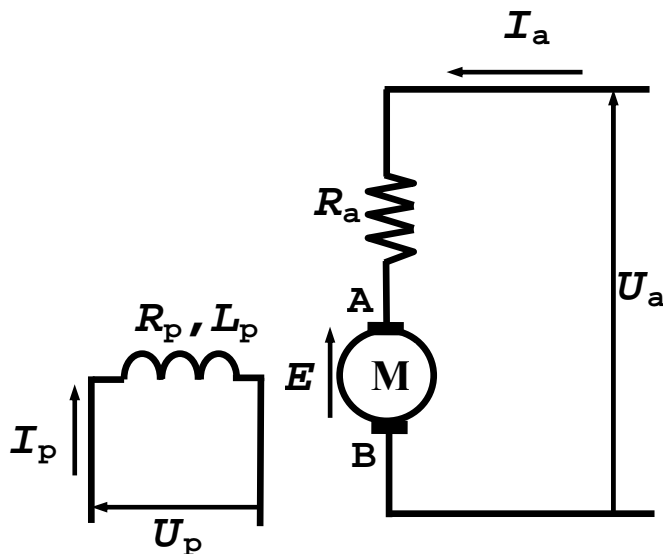
Generatori pretvaraju mehaničku snagu u električnu. Termin *nominalna snaga generatora* se odnosi na električnu snagu, tj. snagu koji motor daje na svojim izlaznim priključcima.

22 kW – nominalna mehanička snaga motora (P_n) – maksimalna snaga koja se može realizovati u trajnom radu. U slučaju MJSS u motornom režimu rada ona predstavlja korisnu mehaničku snagu koja se ostvaruje na vratilu mašine i izražava se [W]. Trajna vrednost momenta $M_{m(nom)}$ koja se može dobiti je manja od elektromagnetskog momenta $M_{em(nom)}$, kojim stator deluje na rotor, stoga što unutar mašine postoje mehanički gubici, moment potreban za savladavanje trenja u ležajevima, otpora vazduha i sl. Dakle, u opštem slučaju, $P_n = \Omega_{nom} M_{m(nom)}$. U zadacima se najčešće mehanički gubici zanemaruju, pa je tada $M_{m(nom)} = M_{em(nom)}$

(kraj diskusije)

(a)

(Slika koja je data dole **nije obavezni deo rešenja** već je data da pomogne razumevanju jednačina)



Mehanička karakteristika motora se dobija iz jednačine naponske ravnoteže $U_a = R_a I_a + k_e \Phi_p \Omega_m$, i može se zapisati u obliku $M_{em} = k_m \Phi_p (U_a / R_a) - (k_m k_e \Phi_p^2 / R_a) \Omega_m = M_P - S \Omega_m$, gde je strmina karakteristike $S = k_m k_e \Phi_p^2 / R_a$. Mehaničku karakteristiku je moguće zapisati i kao $\Omega_m = \Omega_o - M_{em} / S$. Veličine $M_P = k_m \Phi_p (U_a / R_a)$ i $\Omega_o = U_a / (k_e \Phi_p)$ su polazni moment i brzina praznog hoda, presečne tačke mehaničke karakteristike sa apscisom i ordinatom. Između presečnih tačaka, karakteristika ima linearnu promenu.

Iz uslova zadatka, potrebno je odrediti koeficijente $k_e \Phi_{nom} = k_m \Phi_{nom}$. Nominalna vrednost elektromotorne sile motora jednaka je $E_{nom} = U_{nom} - R_a I_{nom} = k_e \Phi_{nom} \Omega_{nom} = 220 - 105 \cdot 0.1 = 209.5$ V. Odavde je $k_e \Phi_{nom} = E_{nom} / \Omega_n = 209.44 / (1500 \pi / 30) = 1.333$ Wb.

ALTERNATIVA

Prema uslovima zadatka, $M_{m(nom)}=M_{em(nom)}=P_{nom}/\Omega_{nom}=22000/(1500 \pi/30)=140.056 \text{ Nm}$

Kako je $k_e=k_m$, može se izračunati da je $k_e \Phi_{nom}=M_{nom}/I_{nom}=1.333 \text{ Wb}$.

Karakteristične tačke i strmina mehaničke karakteristike se izračunavaju na sledeći način:

Polazni moment: $M_P=k_m \Phi_{nom}(U_{nom}/R_a)=2932.6 \text{ Nm}$.

Brzina praznog hoda: $\Omega_o=U_{nom}/(k_e \Phi_{nom})=165.041 \text{ rad/} =1576.03 \text{ o/min}$.

(primetiti da je brzina praznog hoda veća od nominalne brzine. Razlike ne bi bilo da je $R_a=0$).

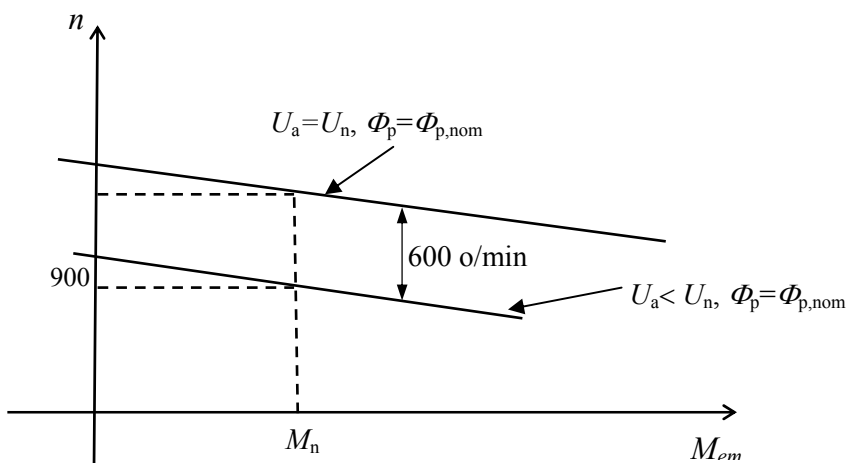
Strmina: $S=k_m k_e \Phi_{nom}^2/R_a=17.777 \text{ [Nm s/rad]}$.

(Polazni moment se u praksi ne može dostići).

(u okviru rešenja, potrebno je nacrtati karakteristiku i na njoj označiti presečne tačke)

(b)

Na dobijenoj mehaničkoj karakteristici, moment koji bi se dobio pri brzini od 900 o/min bi značajno prevazišao nominalni moment.



(Slika data levo **nije obavezni deo rešenja** već je data da pomogne razumevanju jednačina)

Smanjenjem napona napajanja, redukuje se brzina praznog hoda, čime se mehanička karakteristika translira naniže. Potrebno je naći napon napajanja pri kome se razvija nominalni moment pri brzini od 900 o/min. Kako je nominalna brzina pri kojoj se nominalni moment razvija pri nominalnom naponu jednaka 1500 o/min, ovo znači da treba translirati mehaničku karakteristiku za 900 o/min naniže.

Pretpostavimo da je napon smanjen i da iznosi U_1 , čemu odgovara brzina praznog hoda $\Omega_{o1}=U_1/(k_e \Phi_{nom})$.

Tražena brzina je 900 o/min, tako da je

$$\Omega_1=(900 \cdot \pi / 30)=\Omega_{o1}-M_{nom}/S. \text{ Dakle,}$$

$$\Omega_{o1}=(900 \cdot \pi / 30)+M_{nom}/S=94.24777+140.056/17.777=102.126 \text{ rad/s}$$

Napon pri kome se ima ova brzina praznog hoda je:

$$U_1 = k_e \Phi_{nom} \Omega_{o1} = 136.133 \text{ V},$$

Traženo umanjeње napona je $\Delta U = 83.86 \text{ V}$

(napomena: kada u rešenju pomenutu veličinu okarakterišete kao umanjeње, tada nije potrebno koristiti predznak)

11. zadatak – rešenje

a)

Nominalna vrednost elektromotorne sile, E_{nom} , jednaka je

$$E_{nom} = U_{nom} - R_a I_{nom} = k_e \Phi_{nom} \Omega_{nom} = 100 \text{ V}$$

Poznata je nominalna brzina, pa je $k_e \Phi_{nom} = k_m \Phi_{nom} = 0.4 \text{ Wb}$

Nominalna vrednost elektromagnetskog momenta je:

$$M_{nom} = k_m \Phi_{nom} I_{nom} = 4 \text{ Nm}$$

b)

Fluks u jednom navojku pobudnog namotaja u nominalnim uslovima jednak je

$$\Phi_{nom} = (k_e \Phi_{nom}) / k_e = 0.4 \text{ Wb} / [N_R / (2\pi)] = 0.125663 \text{ Wb}.$$

Ukupan fluks pobudnog namotaja u nominalnim uslovima je:

$$\Psi_{Pnom} = N_P \Phi_{nom} = 1.25663 \text{ Wb}.$$

Nominalna vrednost pobudne struje jednaka je:

$$I_{Pnom} = U_{Pnom} / R_P = 0.5 \text{ A}.$$

Induktivnost pobudnog namotaja jednaka je:

$$L_P = \Psi_{Pnom} / I_{Pnom} = 2.5132 \text{ H}.$$

12. zadatak – rešenje

a)

Mehanička karakteristika motora se dobija iz jednačine naponske ravnoteže

$$U_a = R_a I_a + k_e \Phi_P \Omega_m, \text{ i može se zapisati u obliku } M_{em} = k_m \Phi_P (U_a / R_a) - (k_m k_e \Phi_P^2 / R_a) \Omega_m = M_P - S \Omega_m,$$

gde je strmina karakteristike $S = k_m k_e \Phi_P^2 / R_a$. Mehaničku karakteristiku je moguće zapisati i kao $\Omega_m = \Omega_o - M_{em} / S$. Veličine $M_P = k_m \Phi_P (U_a / R_a)$ i $\Omega_o = U_a / (k_e \Phi_P)$ su polazni moment i brzina praznog hoda, presečne tačke mehaničke karakteristike sa apscisom i ordinatom. Između presečnih tačaka, karakteristika ima linearnu promenu.

Iz uslova zadatka, potrebno je odrediti koeficijente $k_e \Phi_{nom} = k_m \Phi_{nom}$. Nominalna vrednost elektromotorne sile motora jednaka je $E_{nom} = U_{nom} - R_a I_{nom} = k_e \Phi_{nom} \Omega_{nom} = 220 - 2 \cdot 20 = 180 \text{ V}$.

Odavde je $k_e \Phi_{nom} = E_{nom} / \Omega_{nom} = 180 / 150 = 1.2 \text{ Wb}$.

Karakteristične tačke i strmina mehaničke karakteristike se izračunavaju na sledeći način:

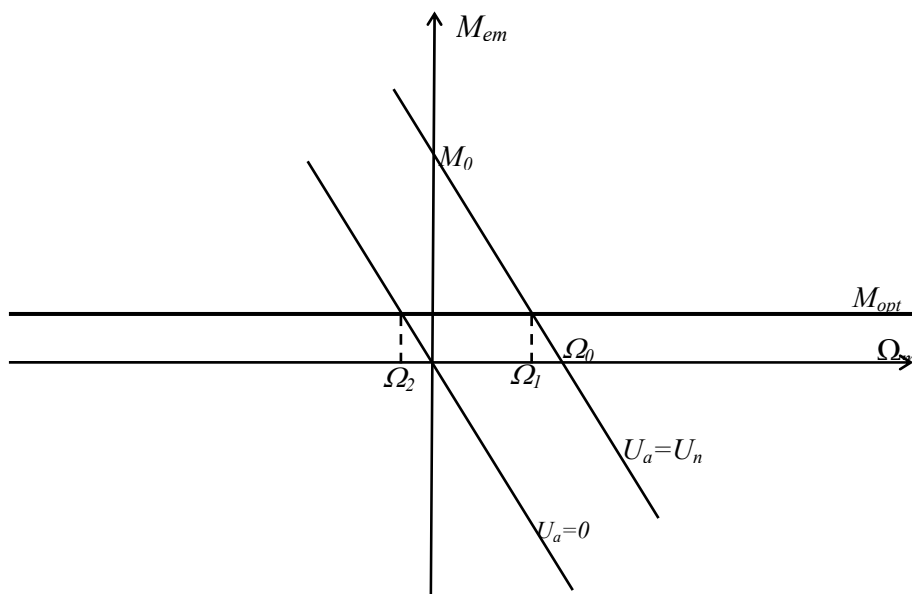
Polazni moment: $M_P = k_m \Phi_{nom} (U_{nom} / R_a) = 132 \text{ Nm}$.

Brzina praznog hoda: $\Omega_o = U_{nom} / (k_e \Phi_{nom}) = 183.333 \text{ rad/s} = 1750.7 \text{ o/min}$.

Strmina: $S=k_m k_e \Phi_{nom}^2 / R_a = 0.72$ [Nm s/rad].

(Polazni moment se u praksi ne može dostići).

Za radni režim opisan u uvodu zadatka ($M_m=6$ Nm) moguće je izračunati brzinu okretanja rotora Ω_1 . Sistem se posmatra u stacionarnom stanju, uz zanemarivu frikciju, pa je $M_{em}=M_m=6$ Nm $=132-0.72\Omega_1$, odakle se izračunava da je $\Omega_1=(132-6)/0.72=175$ rad/s



b)

Kako strmina mehaničke karakteristike nije funkcija napona indukta, a brzina praznog hoda linearno zavisi od istog, to će svođenje napona indukta na nulu rezultovati transliranjem mehaničke karakteristike kao na gore prikazanoj slici. Izraz koji opisuje novu mehaničku karakteristiku sada glasi:

$$M_{em} [Nm] = -0.72 \cdot \Omega_m \left[\frac{rad}{s} \right].$$

Presek nove karakteristike sa karakteristikom opterećenja $M_m=6$ Nm se sada pomera u drugi kvadrant. Očigledno je da mašina prelazi u generatorski režim rada. U novom stacionarnom stanju je brzina okretanja rotora:

$$\Omega_2 = \Omega_m (M_{em} = 6 Nm) = -8.3 \frac{rad}{s}.$$

Kako je napon napajanja jedna nuli, nema razmene snage sa izvorom. Smerovi momenta i brzine su suprotni, dakle, mašina koči, radi kao generator, i pretvara mehanički rad u električnu energiju. Snaga koja se u ovom režimu rada preuzima od mehaničkog opterećenja (radne mašine), uz zanemarenje gubitaka mehaničke prirode, pretvara se u električnu snagu i u potpunosti disipira u namotajima, stvarajući Džulove gubitke u bakru armaturnog namotaja.

Snaga pretvaranja električne energije u mehanički rad je:

$$P_{em} = M_{em} \Omega_m = -(6/0.72) \cdot 6 = -50 \text{ W}.$$

Drugim rečima, snaga *mehaničko-električnog* pretvaranja je +50 W.

PROVERA: (nije neophodna)

Struja koja se u ovom režimu ima u namotaju armature je $I_a = M_{em} / (k_m \Phi_{nom}) = -5$ A. Snaga gubitaka u namotaju je $P_{cu} = R_a I_a^2 = 2 \cdot 5 \cdot 5 = +50$ W. Dakle, snaga dobijena kočenjem se troši u namotajima.