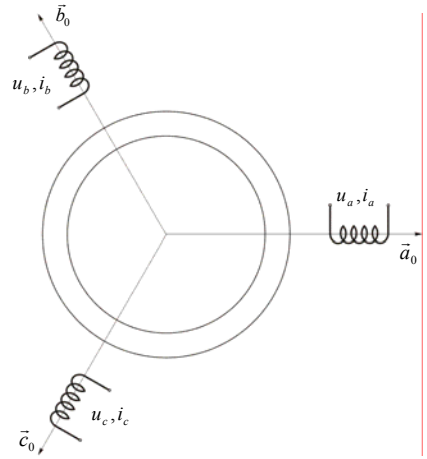
# Синхроне машине



## Принцип рада



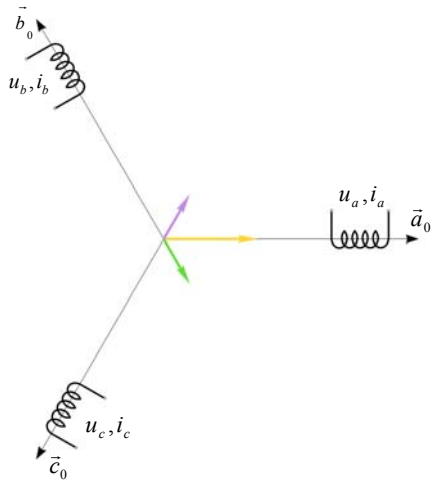

$$i_a = I_m \cos \omega_s t$$

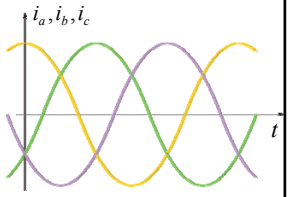
$$i_b = I_m \cos(\omega_s t - \frac{2\pi}{3})$$

$$i_c = I_m \cos(\omega_s t - \frac{4\pi}{3})$$



## Принцип рада



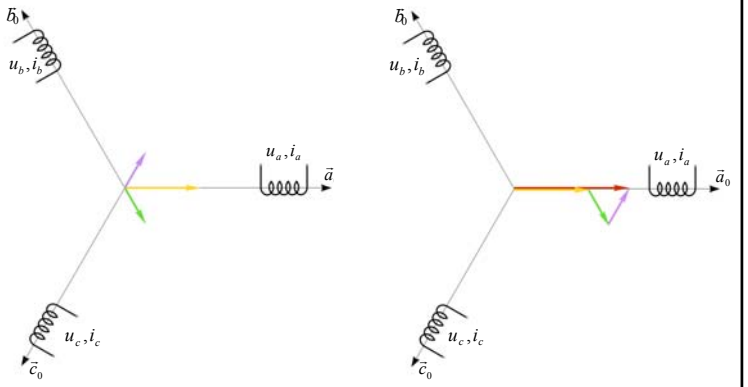

$$F_a = N_s I_m \cos \omega_s t$$

$$F_b = N_s I_m \cos(\omega_s t - \frac{2\pi}{3})$$

$$F_c = N_s I_m \cos(\omega_s t - \frac{4\pi}{3})$$



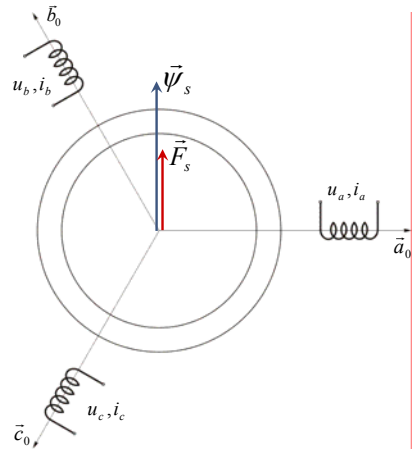
## Принцип рада




$\vec{F}_a$ $\vec{F}_b$ $\vec{F}_c$

$$\vec{F}_s = \vec{F}_a + \vec{F}_b + \vec{F}_c$$

## Принцип рада

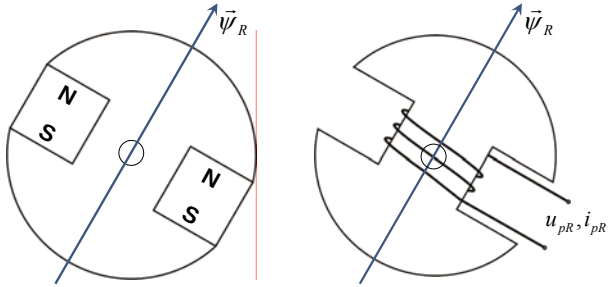



$$\vec{\psi}_s = \frac{\vec{F}_s}{R_\mu}$$



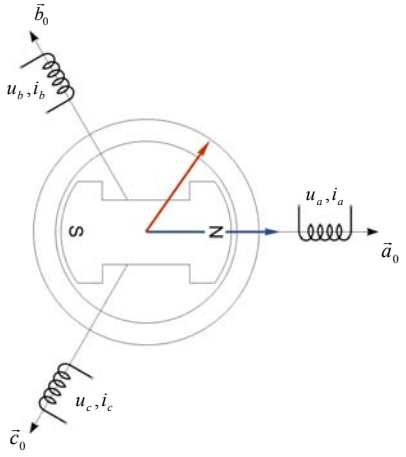
## Принцип рада

Роторски флукс може бити последица перманентних магнета или електромагнета:






## Принцип рада




$\vec{\psi}_R$ $\vec{F}_s$

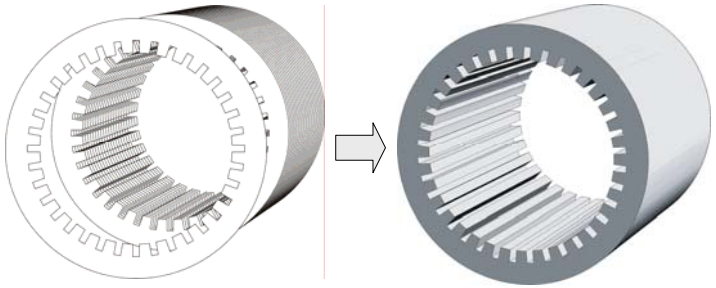
$$\vec{\psi}_s = \frac{\vec{F}_s}{R_\mu}$$

$$\boxed{\vec{M} \cong \vec{\psi}_s \times \vec{\psi}_R}$$



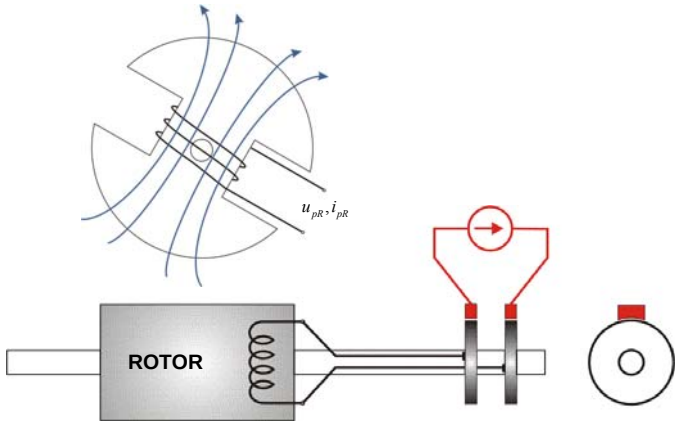
## Конструкција

Статор:



## Конструкција

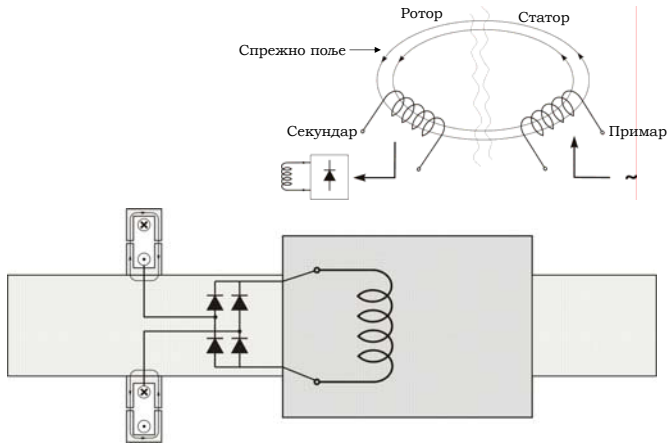
Ротор синхроног мотора са побудним намотајем:






## Конструкција

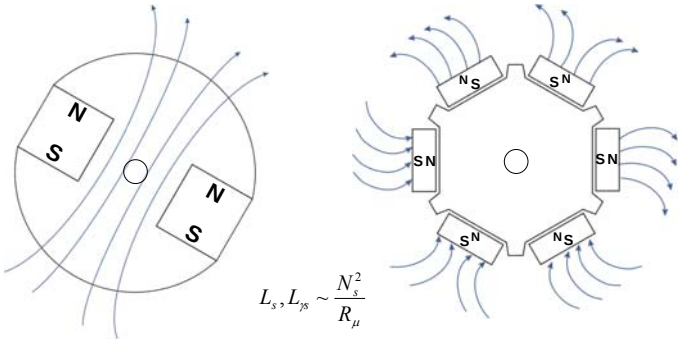
Напајање ротора помоћу бесконтактног обртног трансформатора:






## Конструкција

Ротор синхроног мотора са перманентним магнетима:




$$L_s, L_{ys} \sim \frac{N_s^2}{R_\mu}$$

Унутрашња монтажа магнета:

$L_s \sim (0{,}1 - 0{,}5)\ [r.j.]$

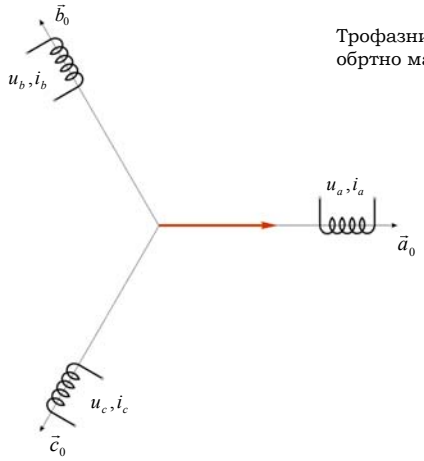
Површинска монтажа магнета:

$L_s \sim (0{,}01 - 0{,}1)\ [r.j.]$

Карактеристике ПМ



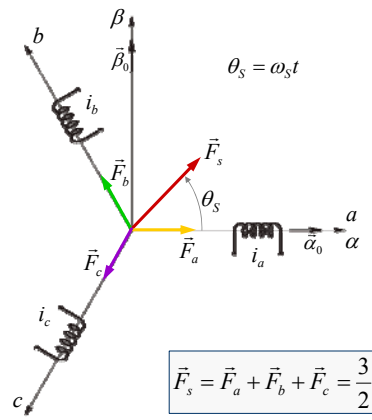
## Моделовање




Трофазни намотај на статору ствара обртно магнетно поље:

$$\vec{F}_s = \vec{F}_a + \vec{F}_b + \vec{F}_c$$

## Моделовање




$\theta_S = \omega_S t$

$i_a = I_m \cos \omega_S t,$
$i_b = I_m \cos(\omega_S t - 2\pi/3),$
$i_c = I_m \cos(\omega_S t - 4\pi/3).$

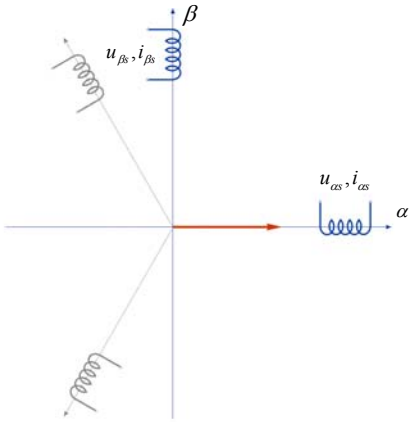
$\vec{F}_a = N i_a \vec{\alpha}_0,$
$\vec{F}_b = N i_b (-\frac{1}{2}\vec{\alpha}_0 + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{\beta}_0),$
$\vec{F}_c = N i_c (-\frac{1}{2}\vec{\alpha}_0 - \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{\beta}_0).$

$$\vec{F}_s = \vec{F}_a + \vec{F}_b + \vec{F}_c = \frac{3}{2} N I_m \left[\vec{\alpha}_0 \cos \omega_S t + \vec{\beta}_0 \sin \omega_S t\right]$$



## Моделовање

Трофазно-двофазна трансформација:

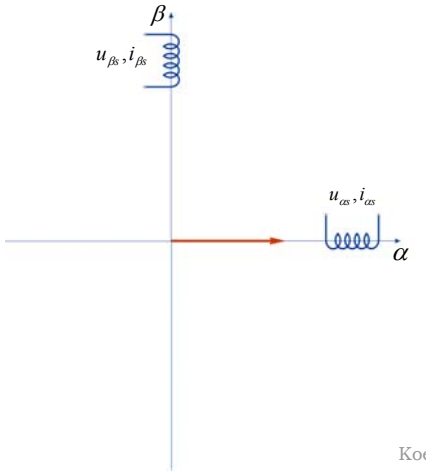


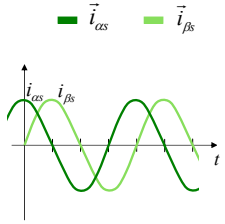

$\vec{F}_s = \vec{F}_{\alpha s} + \vec{F}_{\beta s}$



## Моделовање

Трофазно-двофазна трансформација – Кларкина трансформација:



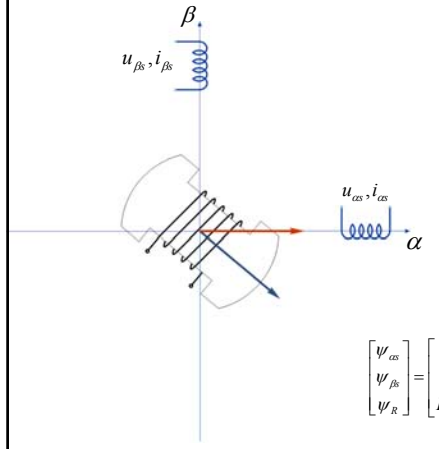

$$\begin{bmatrix} i_{\alpha s} \\ i_{\beta s} \end{bmatrix} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix}$$

Коефицијент трансформације



## Моделовање

Трофазно-двофазна трансформација – Кларкина трансформација:

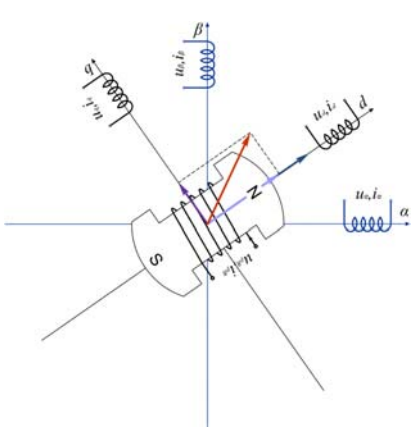


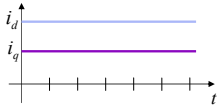

$\vec{F}_s$
$\vec{\psi}_R$
$\vec{i}_{\alpha s}$
$\vec{i}_{\beta s}$

$$\begin{bmatrix} \psi_{\alpha s} \\ \psi_{\beta s} \\ \psi_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_s & 0 & L_m \cos\theta_m \\ 0 & L_s & L_m \sin\theta_m \\ L_m \cos\theta_m & L_m \sin\theta_m & L_p \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_{\alpha s} \\ i_{\beta s} \\ i_{pR} \end{bmatrix}$$

## Моделовање

*αβ – dq* трансформација – Паркова трансформација:




$\vec{F}_s$

$\vec{\psi}_R$

$\vec{i}_d$

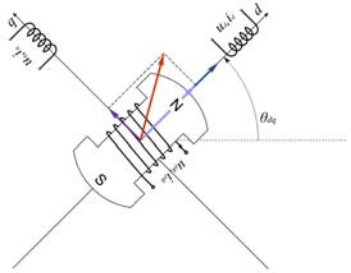
$\vec{i}_q$

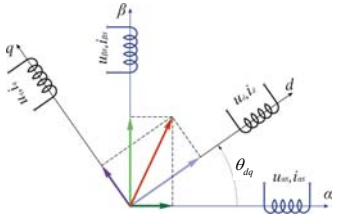
$$\begin{bmatrix}\psi_d\\ \psi_q\\ \psi_R\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}L_s & 0 & L_m\\ 0 & L_s & 0\\ L_m & 0 & L_p\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}i_d\\ i_q\\ i_{pR}\end{bmatrix}$$



## Моделовање

*αβ – dq* трансформација – Паркова трансформација:




$$\theta_{dq}=\theta_{dq}(0)+\int_0^t\omega_m\mathrm{d}\tau$$

$$\begin{bmatrix}i_d\\ i_q\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta_m & \sin\theta_m\\ -\sin\theta_m & \cos\theta_m\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}i_{\alpha s}\\ i_{\beta s}\end{bmatrix}$$

$\vec{F}_s$ $\vec{i}_d$ $\vec{i}_{\alpha s}$

$\vec{\psi}_R$ $\vec{i}_q$ $\vec{i}_{\beta s}$



## Моделовање

Полифазор: $\underline{i}_{dq}=i_d+ji_q=e^{-j\theta_m}(i_{\alpha s}+ji_{\beta s})$

$$\underline{u}_{dq}=e^{-j\theta_m}\cdot\underline{u}_{\alpha\beta s}$$

$$\underline{\psi}_{dq}=e^{-j\theta_m}\cdot\underline{\psi}_{\alpha\beta s}$$

$$\underline{u}_{\alpha\beta s}=R_s\underline{i}_{\alpha\beta s}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\underline{\psi}_{\alpha\beta s}\Rightarrow$$

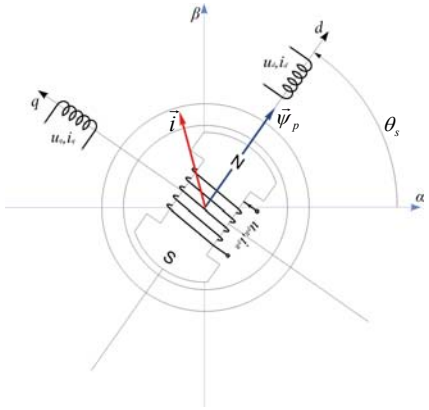
$$\underline{u}_{dq}=e^{-j\theta_m}\left(R_s\underline{i}_{\alpha\beta s}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\underline{\psi}_{\alpha\beta s}\right)=e^{-j\theta_m}\left(R_se^{j\theta_m}\underline{i}_{dq}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(e^{j\theta_m}\underline{\psi}_{dq}\right)\right)$$

$$\underline{u}_{dq}=R_s\underline{i}_{dq}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\underline{\psi}_{dq}+j\omega_m\underline{\psi}_{dq}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\{\underline{u}_{dq}\}&\rightarrow u_d=R_si_d+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\psi_d-\omega_m\psi_q\\ \mathrm{Im}\{\underline{u}_{dq}\}&\rightarrow u_d=R_si_q+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\psi_q+\omega_m\psi_d\end{aligned}$$



## Моделовање




$$u_d=R_si_d+\frac{\mathrm{d}\psi_d}{dt}-\omega_m\psi_q$$

$$u_q=R_si_q+\frac{\mathrm{d}\psi_q}{dt}+\omega_m\psi_d$$

$$u_p=R_pi_{pR}+\frac{\mathrm{d}\psi_p}{dt}$$

Где су флуксеви:

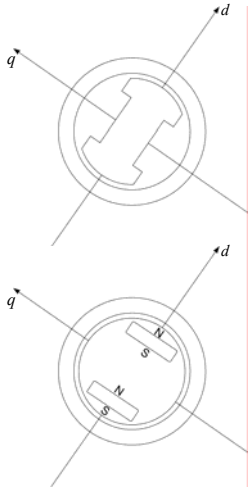
$$\psi_d=L_s^*i_d+L_mi_{pR}$$

$$\psi_q=L_s^*i_q$$

$$\psi_p=L_pi_{pR}+L_mi_d$$

$L_s^*$ - Звездица је стављена само да упозори на разлику индуктивности статора по *d* и *q* оси када се ради о анизотропној машини!

## Моделовање




$R_{\mu d} < R_{\mu q}$
$L_{sd} > L_{sq}$

$$\psi_d = L_{sd} i_d + L_m i_{pR}$$
$$\psi_q = L_{sq} i_q$$
$$\psi_p = L_p i_{pR} + L_m i_d$$

$R_{\mu d} > R_{\mu q}$
$L_d < L_q$

Релуктантни мотор:



## Моделовање

Једначине напонске равнотеже:

$i_{pR} = \text{const.} = I_p$ $\quad$ $L_m I_p = \psi_R$

$$u_d = R_s i_d + L_s \frac{\mathrm{d}i_d}{\mathrm{d}t} - \omega_m L_s i_q$$
$$u_q = R_s i_q + L_s \frac{\mathrm{d}i_q}{\mathrm{d}t} + \omega_m L_s i_d + \omega_m \psi_R$$

$\omega_m$ - Електрична брзина,
$\Omega_m$ - Механичка брзина,
$p$ - Број пари полова

$$\omega_s = \omega_m = p\Omega_m$$

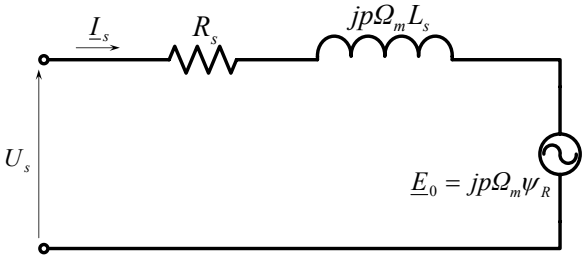
У стационарном стању:

$$u_d = R_s i_d - \omega_m L_s i_q$$
$$j u_q = j R_s i_q + j\omega_m L_s i_d + j\omega_m \psi_R$$
$$\underline{u}_s = u_d + j u_q$$
$$\underline{i}_s = i_d + j i_q$$

$$\Rightarrow \quad \underline{u}_s = R_s \underline{i}_s + j\omega_m L_s \underline{i}_s + j\omega_m \psi_R$$
$$L_{ds} = L_{qs}$$



## Заменска шема за стационарна стања




$\underline{E}_0 = jp\Omega_m \psi_R = j\omega_m \psi_R$ → Емс празног хода

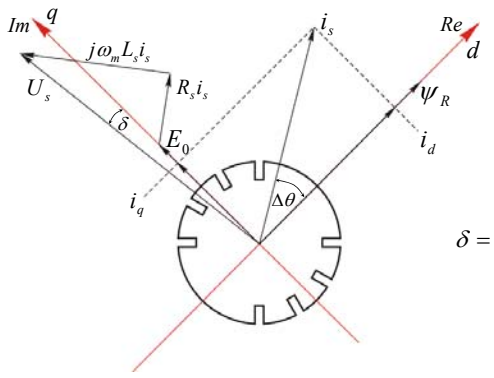
$$M_{em} = \frac{3}{2} \psi_R i_q + \frac{3}{2} (L_d - L_q) i_d i_q$$



## Фазорски дијаграм изотропне машине

$$\underline{U}_s = R_s \underline{I}_s + j\omega_m L_s \underline{I}_s + j\omega_m \psi_R$$

Овај дијаграм представља заменску шему за стационарна стања:

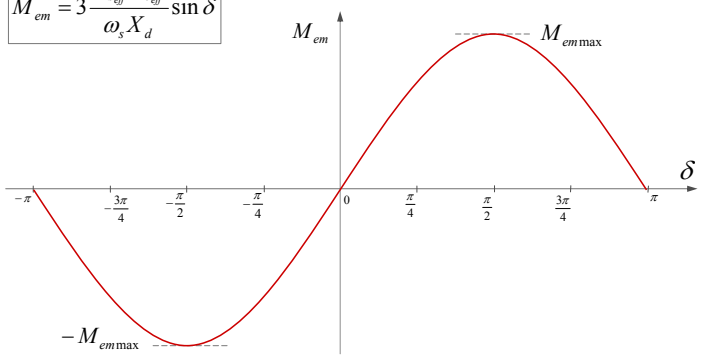



$$\delta = \arg(\underline{U}_s) - \arg(\underline{E}_0)$$
$$M \sim \sin \Delta\theta$$

Анизотропна машина

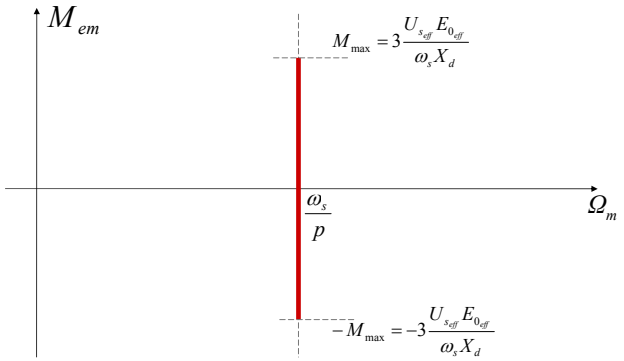
## Електромагнетни момент синхроне машине

$$M_{em} = 3\frac{U_{s_{eff}} E_{0_{eff}}}{\omega_s X_d}\sin\delta$$






## Механичка карактеристика синхроне машине

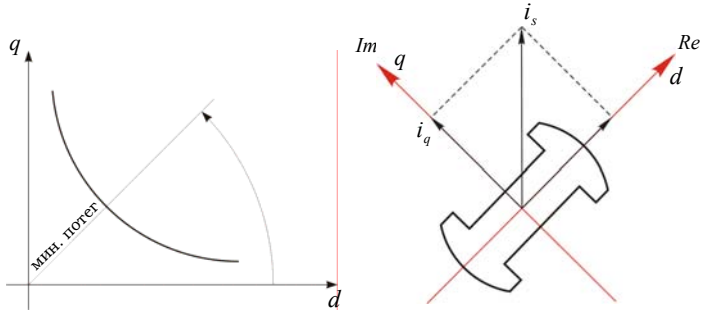





## Релуктантни момент синхроне машине

$$M_r \sim i_d i_q$$

Максимални производ струја $i_d i_q$ је за $i_d = i_q$:

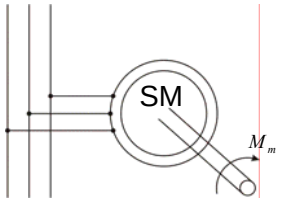





## Карактеристике машине за *Us*=const. и *f*=const.

Шта се дешава када је $\omega_s = const.$, а $\omega_m$ се мења?

$$\dot{\delta} = \omega_s - \omega_m$$




$$J\frac{\mathrm{d}\omega_m}{\mathrm{d}t} = M_{em} - M_m \quad \Rightarrow \quad J\ddot{\delta} = -M_{em} + M_m$$

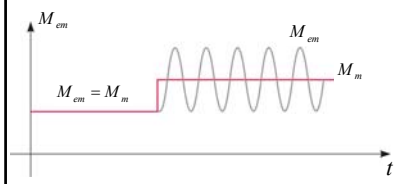
$$\ddot{\delta} = \dot{\omega}_s - \dot{\omega}_m \quad (\omega_s = const.) \Rightarrow$$

$$\ddot{\delta} = -\dot{\omega}_m$$

$$\omega_m \downarrow \quad \delta \uparrow \Rightarrow \quad M_{em} \uparrow$$

- Синхроне машине -

## Карактеристике машине за $Us$=const. и $f$=const.

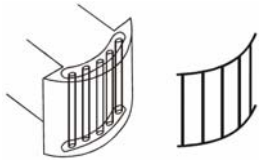



$$\delta \approx 0 \quad \Rightarrow \quad M_{em} \approx k\delta$$

$$J\ddot{\delta} + k\delta = M_m$$

$$Js^2\delta(s) + k\delta(s) = M_m(s) \qquad s^2 + \frac{k}{J} = 0$$

Да би се унело пригушење, потребан је члан пропорционалан изводу $\delta$:

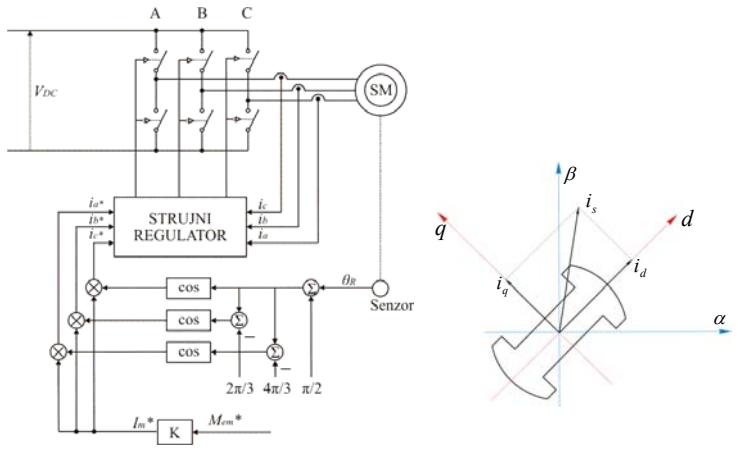


$$J\ddot{\delta} + k_p\dot{\delta} + k\delta = M_m \qquad s^2 + \frac{k_p}{J}s + \frac{k}{J} = 0$$

$$s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 = 0$$

- Синхроне машине -

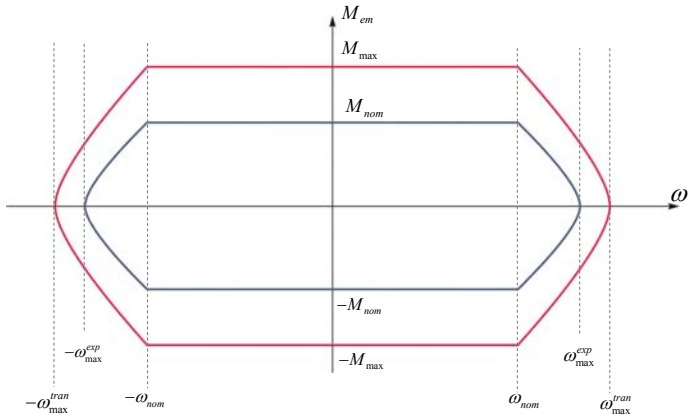
## Синхрона машина напајана из струјног извора




Карактеристике

- Синхроне машине -

## Експлоатациона и транзијентна карактеристика

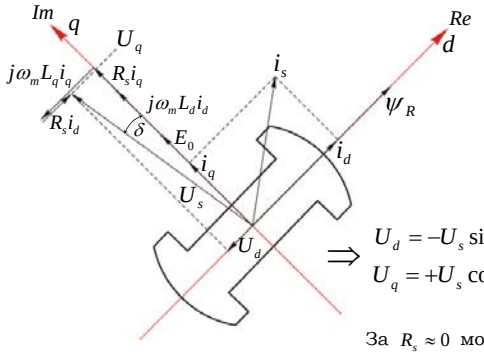



Транзијентна карактеристика

Експлоатациона карактеристика

- Синхроне машине -

## Фазорски дијаграм анизотропне машине




$$\Rightarrow \quad U_d = -U_s \sin\delta = R_s i_d - \omega_m L_q i_q$$
$$U_q = +U_s \cos\delta = R_s i_q + \omega_m L_d i_d + \omega_m \psi_R$$

За $R_s \approx 0$ може се писати:

$$i_q = +\frac{U_s \sin\delta}{\omega_m L_q} = \frac{U_s \sin\delta}{X_q} \qquad i_d = \frac{U_s \cos\delta - \omega_m \psi_R}{\omega_m L_d} = \frac{U_s \cos\delta - E_0}{X_d}$$

Момент анизотропне машине

- Синхроне машине -

## Електромагнетни момент анизотропне синхроне машине

$$M_{em} = \frac{3}{2}\frac{P_e}{\omega_s} \rightarrow \frac{3}{2}\frac{U_d I_d + U_q I_q}{\omega_s} \rightarrow \frac{3}{2}\psi_R i_q + \frac{3}{2}(L_d - L_q)\cdot i_d i_q$$

Електромагнетни момент:

$$M_{em} = 3\frac{U_{s_{eff}} E_{0_{eff}}}{\omega_s X_d}\sin\delta + \frac{3}{2}\frac{U_{s_{eff}}^2}{\omega_s}\left(\frac{1}{X_q} - \frac{1}{X_d}\right)\sin 2\delta = M_s + M_r$$

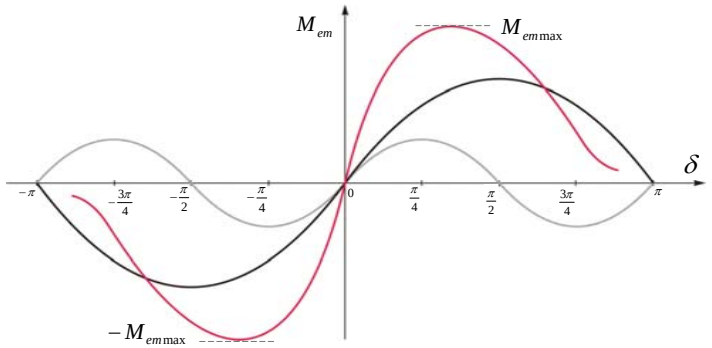
где су:

$M_s = 3\frac{U_{s_{eff}} E_{0_{eff}}}{\omega_s X_d}\sin\delta$ - синхрони момент, и

$M_r = \frac{3}{2}\frac{U_{s_{eff}}^2}{\omega_s}\left(\frac{1}{X_q} - \frac{1}{X_d}\right)\sin 2\delta$ - релуктантни момент

- Синхроне машине -

## Електромагнетни момент анизотропне синхроне машине




$M_s$ - синхрони момент,

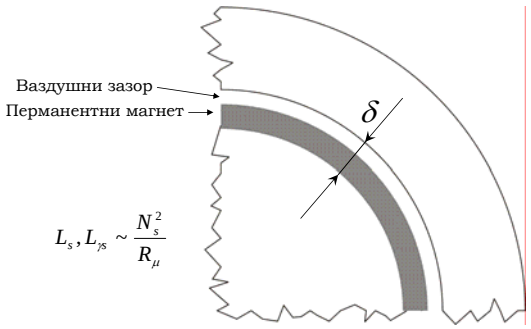
$M_r$ - релуктантни момент,

$M_{em} = M_s + M_r$ - електромагнетни момент (резултантни)

- Синхроне машине -

## Карактеристике перманентних магнета

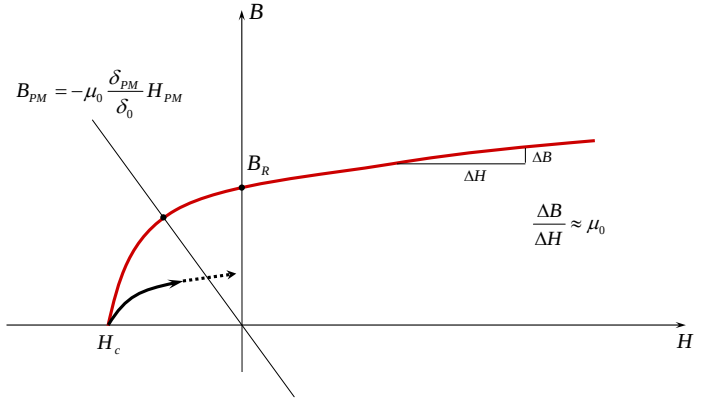
Реакција перманентног магнета на екстерно поље је таква да се он понаша као ваздух.




$$R_\mu = \frac{2\delta}{\mu_0 S}$$

## Карактеристике перманентних магнета

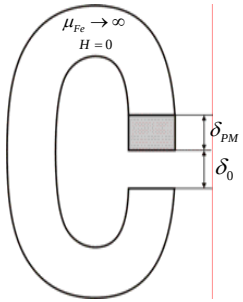
Карактеристика магнетизације перманентног магнета:






## Карактеристике перманентних магнета

Како је $\oint \vec{H} d\vec{l} = 0$ може се писати:




$$H_{PM}\delta_{PM} + H_0\delta_0 = 0$$

$$B_{PM} = B_0 = \mu_0 H_0$$

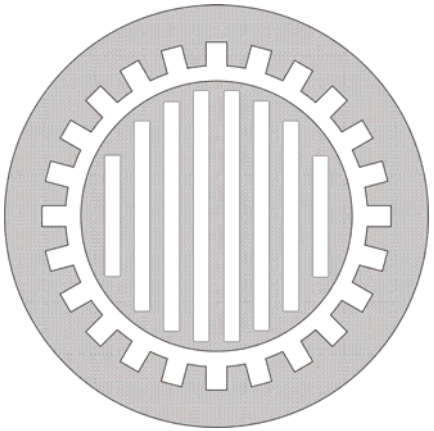
$$H_0 = \frac{B_{PM}}{\mu_0}$$

$$H_{PM}\delta_{PM} + \frac{B_{PM}}{\mu_0}\delta_0 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$B_{PM} = -\mu_0 \frac{\delta_{PM}}{\delta_0} H_{PM}$$

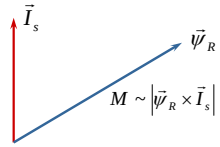


## Релуктантни мотор





## Карактеристике машине напајане из струјног извора




$$M_{em} = \frac{3p}{2}\psi_R i_q\Big|_{\omega<\omega_{nom}}$$

$$\psi_d = \psi_R + L_d i_d$$

$$\psi_d(\omega)\big|_{\omega>\omega_{nom}} = \psi_R \frac{\omega_{nom}}{\omega}$$

$$i_d(\omega)\big|_{\omega>\omega_{nom}} = -\psi_R\left(1 - \frac{\omega_{nom}}{\omega}\right)\frac{1}{L_d}$$